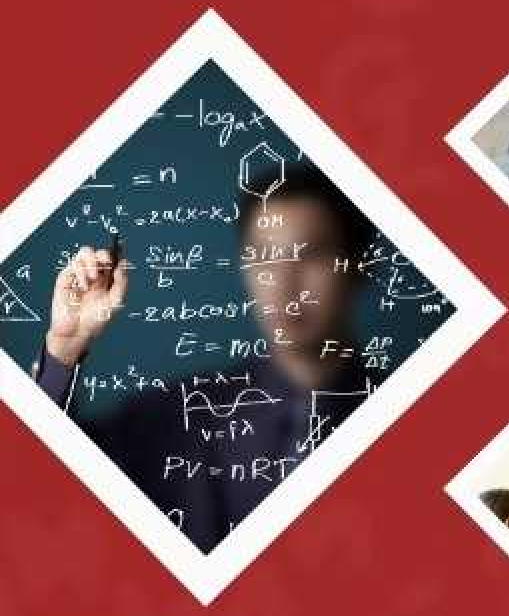
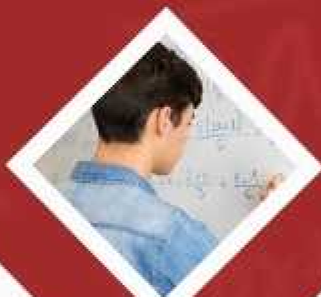
Maizar, S.Pd., M.Si
Ita Mustika, S.E., M.Ak, CTT

PENGANTAR
MATEMATIKA EKONOMI

BATAM PUBLISHER

Pengantar Matematika Ekonomi

Penulis:
Maizar, S.Pd., M.Si
Ita Mustika, S.E., M.Ak, CTT

ISBN: 978-623-5645-08-7

Editor:
Viola Syukrina E Janrosl, S.E., M.M
Mulyadi, S.E., M.M, CTT

Penerbit:
Batam Publisher

Redaksi:
Pertokoan Permata Rhabayu Blok E No. 17 Batam
Kepulauan Riau – 29439
Tel. 0778-391407
Email: batampublisher@gmail.com

Cetakan Pertama, Januari 2022

KATA PENGANTAR

Syukur Alhamdulilah kita panjatkan pada Allah SWT, karena berkat rahmat dan hidayahNya, serta salawat dan salam atas nabi Muhammad SAW, sehingga akhirnya Penulis dapat menyelesaikan penyusunan dan penulisan Buku Pengantar Matematika Ekonomi ini sesuai rencana. Buku ini ditulis secarara komplikasi dari berbagai sumber.

Buku Pengantar Matematika Ekonomi ini ditulis dengan bahasa yang sederhana, namun tanpa mengurangi materi yang sudah disesuikan dengan Satuan Ajar perkuliahan (SAP). Latar belakang penulisan buku ini adalah untuk memberi pegangan kepada mahasiswa fakultas ekonomi khususnya jurusan ekonomi manajemen dan juga untuk umum.

Buku ini berisikan pelajaran matematika ekonomi dimana setiap bab selalu dilengkapi dengan pendahuluan sebagai pengantar, mengarahkan pikiran pembaca guna memahami konsep yang akan dibahas, diikuti dengan penanaman konsep-konsep yang telah dibahas. Pendalaman konsep pada contoh soal yang disertai dengan penyelesaiannya dan dilengkapi juga dengan soal-soal latihan. Dengan demikian ketika mengakhiri pembahasan pada masing-masing bab, para pembaca diharapkan telah memperoleh pengetahuan yang benar untuk dapat menyelesaikan persoalan-persoalan yang muncul.

Kepada semua pihak yang telah mendukung, membantu dan berpartisipasi dalam penulisan buku ini, dari awal penulisan sampai pada penyelesaian nya, kami ucapkan banyak terima kasih.

Kami menyadari penulisan ini masih banyak kekurangan-kekurangan sehingga kami sangat mengharapkan dan senang apabila berkenan untuk memberikan kritikan, saran dan masukan agar kedepan lebih baik dan berkualitas.

Batam, Januari 2022

Penulis

DAFTAR ISI

KATA PENGANTAR .... **i**
DAFTAR ISI .... **iii**

BAB I TEORI HIMPUNAN DAN SISTEM BILANGAN
1.1 Pendahuluan... 2
1.2 Pengertian Himpunan................................ 3
1.3 Penulisan Suatu Himpunan 4
1.4 Jenis Himpunan dan Diagram Venn........... 7
1.5 Operasi Himpunan.................................... 13
1.6 Hukum Operasi Himpunan 17
1.7 Soal Latihan 20

BAB II RELASI DAN FUNGSI
2.1 Pendahuluan... 23
2.2 Pengertian Relasi 24
2.3 Pengertian Fungsi 26
2.4 Perkalian Cartesius 29
2.5 Grafik Suatu Fungsi................................... 30
2.6 Unsur - Unsur Suatu Fungsi 33
2.7 Macam - Macam Fungsi............................ 34
2.8 Soal Latihan 36

BAB III FUNGSI LINIER DAN PERSAMAAN GARIS LURUS
3.1 Pendahuluan 39
3.2 Pengertian Fungsi Linier 39
3.3 Grafik Fungsi Linier.................................... 41

3.4 Gradien Garis Lurus 43
3.5 Persamaan- Persamaan Garis Lurus 45
3.6 Hubungan Dua Garis Lurus 48
3.7 Soal Latihan 51

BAB IV APLIKASI FUNGSI LINIER DALAM BIDANG EKONOMI

4.1 Pendahuluan 54
4.2 Fungsi Permintaan (Demand) 55
4.3 Fungsi Penawaran (Supply) 58
4.4 Keseimbangan Pasar 60
4.5 Pengaruh Pajak Terhadap Keseimbangan Pasar 63
4.6 Pengaruh Subsidi Terhadap Keseimbangan Pasar 71
4.7 Keseimbangan Pasar Dua Jenis Barang 75
4.8 Pengaruh Pajak dan Subsidi Terhadap Keseimbangan Pasar Dua Jenis Barang 78
4.9 Fungsi Konsumsi 82
4.10 Analisis Pulang Pokok 86

BAB V FUNGSI TAN-LINIER

5.1 Pendahuluan 102
5.2 Fungsi Kuadrat 103
5.3 Fungsi Pecah 109
5.4 Hiperbola Fermat 113
5.5 Fungsi Eksponem dan Fungsi Logaritma 116
5.6 Fungsi Logaritma 121
5.7 Soal Latihan 124

BAB VI LIMIT FUNGSI

6.1 Pendahuluan 128
6.2 Pengertian Limit Fungsi 129
6.3 Konsep Limit 130
6.4 Sifat- Sifat Limit 131
6.5 Contoh Soal Limit 132

BAB VII TURUNAN

7.1 Pendahuluan 137
7.2 Pengertian Turunan 138
7.3 Aturan Untuk Mencari Turunan 140
7.4 Turunan Trigonometri 146
7.5 Soal Latihan 148

DAFTAR PUSTAKA... 149

BAB 1 TEORI HIMPUNAN DAN SISTEM BILANGAN

PEMBAHASAN MATERI

Bab ini membahas pemahaman kaidah tentang pengertian himpunan, penulisan himpunan, jenis himpunan, diagram venn, operasi-operasi pada himpunan, hukum-hukum operasi himpunan, banyaknya himpunan bahagian, sistem dan himpunan bilangan.

TUJUAN INSTRUKSIONAL KHUSUS

Setelah selesai mempelajari bab ini, Mahasiswa diharapkan mampu

1. Memahami dan menjelaskan pengertian dari himpunan
2. Memahami dan menjelaskan cara penulisan himpunan
3. Memahami dan menjelaskan himpunan semesta dan himpunan bagian
4. Memahami dan menjelaskan himpunan berhingga dan tak berhingga

5. Menjelaskan perbedaan himpuan nol dan himpuan kosong
6. Memahami dan menjelaskan himpunan yang sama dan ekivalen
7. Memahami dan menjelaskan komplemen suatu himpunan
8. Memahami dan menjelaskan dan mengambar himpunan dalam diagram venn
9. Memahami dan menjelaskan operasi-operasi pada himpunan
10. Memahami dan menjelaskan cara menghitung banyaknya himpunan bagian
11. Memahami dan menjelaskan sistem dan himpunan bilangan

1.1 PENDAHULUAN

Teori himpunan merupakan teori yang paling dasar bagi cabang matematika, oleh sebab itu diberikan di awal buku ini. Pelajaran teori himpunan sudah diberikan saat di pendidikan dasar sampai tingkat menengah walaupun hanya pengenalan dasar-dasar teori himpunan.

Disadari atau tidak, dalam kehidupan sehari - hari sesungguhnya kita telah mengetahui dan menerapkan konsep – konsep himpunan. Di masyarakat kita, para tokoh, dokter, dosen, guru, pedagang, dan yang lainnya telah menghimpun kelompoknya dalam suatu wadah yang menunjukkan kumpulan dari masing – masing kesatuannya. Contohnya Ikatan Dokter Indonesia (IDI), Asosiasi Dosen Indonesia (ADI), Persatuan Guru Republik Indonesia (PGRI) dan banyak lagi perkumpulan yang menyatukan diri mereka dalam satu wadah organisasi.

Dalam analisa matematika, teori himpunan sering digunakan seperti himpunan data observasi di lapangan, himpunan penyelesaian dari suatu model. Untuk membentuk suatu model ekonomi dan bisnis diperlukan data penelitian di lapangan

1.2 PENGERTIAN HIMPUNAN

Secara sederhana himpunan adalah suatu kumpulan objek yang berbeda, yang diberikan serta dirumuskan secara tegas dan dapat dibedakan satu dengan yang lainnya. Setiap obyek benda atau simbol yang secara kolektip membentuk suatu kumpulan atau himpunan disebut elemen, unsur atau anggota dari himpunan tersebut

Kita telah menggunakan kata himpunan beberapa kali karena konsep himpunan mendasari setiap cabang matematika modern, maka penting sekali untuk membiasakan diri paling tidak dengan aspek – aspek mendasar dari suatu himpunan.

1.3 PENULISAN SUATU HIMPUNAN

Himpunan dituliskan atau dinyatakan dengan notasi **{ }** dan anggota-anggotanya ditulis didalam kurung kurawal tersebut dan nama himpunannya ditulis dengan huruf capital.

Ada dua (2) cara penuliskan atau menampilkan suatu himpunan Yaitu:

1. Cara Tabulasi (Roster Method)

   Cara tabulasi adalah suatu cara dengan mencantumkan seluruh obyek yang menjadi anggota atau menyebutkan dengan menyebutkan setiap elemen yang menjadi anggota himpunan tersebut.

Contoh

- A adalah himpuan nama-nama bulan dalam tahun Masehi maka di tulis menjadi **A = { Januari, Febuari, Maret, ... ,Desember}**
- B adalah himpunan bilangan bulat yang lebih dari dua dan kurang dari sepuluh , maka ditulis menjadi **B = { 3, 4, 5, . . . , 9 }**
- C adalah bilangan Prima yang lebih dari Tujuh , maka di tulis menjadi **C = { 11, 13 , 17, 19, 23, ...}**

2. Cara Perincia (Rule Method)

   Cara perincian adalah suatu cara dengan menyebutkan karakteristik tertentu dari obyek atau dengan symbol yang menjadi anggota himpuan tersebut.

Contoh

- A adalah himpuan nama-nama bulan dalam tahun Masehi maka di tulis menjadi **A = { x I x nama-nama bulan dalam tahun Masehi }**
- B adalah himpunan bilangan bulat yang lebih dari dua dan kurang dari sepuluh , maka ditulis menjadi **B = { x I 2 < x < 10 , x bil. Bulat }**
- C adalah bilangan Prima yang lebih dari Tujuh , maka di tulis menjadi **C = { x I x ≥ 7 , x bilangan Prima}**

Setiap unsur yang merupakan anggota atau elemen dari suatu himpunan dapat disimbolkan dengan notasi **ϵ** (epsilon) sedangkan yang menyatakan bukan anggota dari suatu himpunan di simbolkan dengan notasi **ϵ**

Contoh

- **A = { x I x komoniti non migas }**

Maka

a) Kopi $\in$ A	c) Cengkeh $\in$ A

b) Ikan tuna $\in$ A	d) Solar $\notin$ A

- **B = { 1, 2 , 3 , 4 }**

Maka

c) 1 $\in$ B	c) 3 $\in$ B

d) 5 $\notin$ B	d) 7 $\notin$ B

1.4 JENIS HIMPUNAN DAN DIAGRAM VENN

A. Himpunan Berhingga

Himpunan berhingga adalah suatu himpunan yang jumlah anggotanya terbatas atau dapat dihitung banyaknya.

Contoh :

a) P = { x I 5 $\leq$ x $<$ 10 , x bilangan Asli}

b) Q = { a , b , c , d , e , f , g }

c) R = { x I x warna lampu lalu lintas }

B. Himpunan Tak Berhingga

Himpunan tak berhingga adalah suatu himpunan yang jumlah anggotanya tidak terhitung banyaknya atau tidak terbatas jumlahnya

Contoh

a) P = { x I x $\geq$ 10 , x bilangan Cacah }

b) Q = { 2 , 3 , 5 , 7 , 11 , ... }

c) R = { x I nama – nama orang yang berawal huruf K }

C. Himpunan Kosong

Himpunan kosong adalah himpunan yang tidak ada anggotannya dengan lambing notasinya φ atau **{ }**

Contoh

a) A = { x I x Nama = nama bulan tahun Masehi yang berawal huruf B }

b) B = { y I y manusia yang mempunyai tanduk}

c) C = { x I x **<** 1 , x bilangan Asli }

D. Himpunan Semesta dan Himpunan Bagian

Himpunan semesta adalah himpunan yang memuat semua obyek atau elemen yang menjadi obyek pembahasan dengan lambang atau simbol S (Semesta) atau U (Universal) sedangkan himpunan bagian adalah suatu himpunan yang ada dalam himpunan semesta atau suatu himpunan yang merupakan himpuan bagian dari suatu himpunan lain yang anggotanya lebih banyak. Dengan simbol himpunan bagian dengan notasinya : $\subseteq$

Contoh

a) Diketahui

S = { x I x mahasiswa universitas Indonesia}

A = { y I y mahasiswa fakultas Kedokteran UI}

B = { z I z mahasiswa jurusan kedokteran gigi Fak.Kedokteran UI }

Himpunan S adalah himpunan semesta dan himpunan A dan B. himpunan A dan B adalah himpunan bagian dari S. Begitu juga himpunan B adalah himpunan bagian dari himpunan A dan himpunan A merupakan himpunan Semesta dari himpunan B.

Hubungan ketiga himpunan tersebut dapat ditulis

$\mathbf{A \subseteq S}$ $\qquad$ $\mathbf{B \subseteq A}$

$\mathbf{B \subseteq S}$ $\qquad$ $\mathbf{B \subseteq A \subseteq S}$

b) Diketahui

$S = \{ x \mid 2 \leq x \leq 10 \text{ , } x \text{ bil. Asli} \}$

$P = \{ 2, 3, 5, 7, 9, 10 \}$

$Q = \{ 3, 5, 7, 9 \}$

Maka

$P \subseteq S$ $\quad Q \subseteq S$ $\quad Q \subseteq P$ dan $Q \subseteq P \subseteq S$

E. Komplemen suatu Himpunan

Himpunan komplemen dari suatu himpunan adalah himpunan selain himpunan anggotanya atau bukan himpuan anggotanya. Namun ia merupakan himpunan semesta. Dan dilambangkan dengan nama himpunan berpangkat c (A^c)

Contoh

Jika $S = \{ x \mid x \leq 10 \text{ , } x \text{ bil. Cacah} \}$

$A = \{ 0, 2, 4, 6, 8, \}$

$B = \{ 1, 3, 5, 7, 9 \}$

Maka himpunan A komplemen adalah

$A^c = \{ 1, 3, 5, 7, 9, 10 \}$ dan

B komplemen adalah B^c = { 0, 2, 4, 6 , 8 , 10 }

F. Himpunan Yang sama (=)

Himpunan yang sama adalalah suatu himpunan yang jumlah anggotanya sama dan karakteristik anggotanya juga sama. **=**

Contoh

Diketahui

A = { p , q , r, s , t }, B = { q , p , t , s , r },

dan C = { 1 ,2 ,3 }

Maka dapat dinyatakan A = B sedangkan

A = $\cancel{C}$ dan B = $\cancel{C}$

G. Himpunan Ekivalen (~)

Himpunan yang ekivalen adalah suatu himpunan yang jumlah anggotanya sama sedangkan karakteristik anggotanya berbeda.

Contoh

Jika diketahui

A = { 5 , 10 , 15 }

B = { p , q , r }

C = { motor, mobil, kapal laut }

Maka

$$\left.\begin{array}{l} n(A) = 3 \\ n(B) = 3 \\ n(C) = 3 \end{array}\right\} \text{jadi} \quad A \sim B \sim C$$

H. Banyaknya himpunan bagian

Jika banyaknya anggota himpunan A adalah

n (A) = a maka banyaknya himpunan bagian dari

A adalah 2^a

Contoh

Diketahui P = (1 , 2 , 3 , 4 } maka n(P) = 2^4= 16

Dan himpunan-himpunannya adalah

{ } {1] {2} {3} { 4 } { 1, 2 } { 1, 3 } { 1 , 4 }

{ 2 , 3 } { 2, 4 } { 3 , 4] { 1 ,2 ,3 }

{ 1, 2 ,4 } { 1 , 3, 4 } { 2 , 3 , 4 } { 1 ,2 ,3 ,4 }

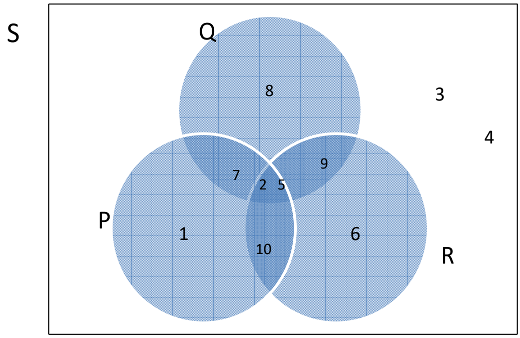
I. Diagram Venn

Diagram venn adalah diagram atau gambar yang menunjukkan gambaran suatu himpunan atau gambaran hubungan himpunan satu dengan himpunan yang lainnya.

Contoh

Diketahui

S = { 0, 1, 2, ... 10 }
P = [1, 2 , 5 , 7, 10]
Q = { 2 , 5 , 7 , 8 , 9 }
R = { 2 , 5, 6, 9 , 10]



1.5 OPERASI HIMPUNAN

- **Operasi Gabungan (U)**

Operasi gabungan himpunan A dan himpunan B adalah himpunan gabungan dari seluruh anggota himpunan A dan seluruh anggota
2 5
himpunan B namun jika ada anggota yang sama cukup di tulis satu kali saja.

Dinotasikan A **U** B = { x I x **ϵ** A atau 10 x **ϵ** B }

Contoh

Jika S = { 0 , 1 , 2 , ... 15 }

A = { 1, 3 , 4 , 6 , 8 , 12 }

B = { 0 , 1 , 3, 5, 7, 9 , 11 }

C = { 1 , 2 , 3 , 4 , 10 , 14 }

Maka

a) A **U** B = { 0, 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11, 12 }

b) A **U** C = { 1 , 2 , 3 , 4 , 6 , 8 , 10 , 12, 14}

c) B **U** C = { 0 , 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 7 , 9 , 10 , 11 , 14 }

d) A **U** B **U** C = { 0 , 1 , 2 , 3, ... 10 , 11 , 12 , 14 }

- **Operasi Irisan (∩)**

Operasi irisan himpunan A dengan B adalah himpunan yang anggotanya yang sama atau anggota himpunan yang ada di himpunan A dan yang ada di himpunan B.

Dinotasikan A ∩ B = { x I x ϵ A dan x ϵ B }

Contoh

Jika S = { 0 , 1 , 2 , ... 15 }

$A = \{ 1, 3, 4, 6, 8, 12 \}$

$B = \{ 0, 1, 3, 5, 7, 9, 11 \}$

$C = \{ 1, 2, 3, 4, 10, 14 \}$

Maka

a) $A \cap B = \{ 1, 3 \}$

b) $A \cap C = \{ 1, 3, 4]$

c) $B \cap C = \{ 1, 3 \}$

d) $A \cap B \cap C = \{ 1, 3 \}$

- **Operasi Tambah (+)**

  Operasi tambah himpunan A dengan B adalah gabungan seluruh anggota himpunan A dengan seluruh anggota himpunan B tetapi tidak termasuk anggota yang sama.

  Dinotasikan $A + B = \{ x \mid x \in A$ atau $x \in B$, dan $x \in (A \cap B) \} = \{ x \mid x \in (A \cup B)$ dan $x \in (A \cap B) \}$

  Contoh

Jika $S = \{ 0, 1, 2, \ldots 15 \}$

$A = \{ 1, 3, 4, 6, 8, 12 \}$

$B = \{ 0, 1, 3, 5, 7, 9, 11 \}$

$C = \{ 1, 2, 3, 4, 10, 14 \}$

Maka

a) $A + B = \{ 0, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11, 12 \}$

b) $A + C = \{ 2, 6, 8, 10, 12, 14 \}$

c) $B + C = \{ 0, 2, 4, 5, 7, 9, 10, 11, 14 \}$

d) $A + B + C = \{ 0, 1, 2, 3, 5, 6, \ldots, 12, 14 \}$

- **Operasi Selisih (-)**

Operasi selisih dari himpuan A dengan B adalah seluruh anggota A yang bukan anggota B, begitu juga sebaliknya jika himpunan B selisih dengan A maka himpunannya adalah seluruh anggota B yang bukan anggota A

Dinotasikan $A - B = \{ x \mid x \in A , x \in B \}$

Contoh

Jika $S = \{ 0, 1, 2, \ldots 15 \}$

$A = \{ 1, 3, 4, 6, 8, 12 \}$

$B = \{ 0, 1, 3, 5, 7, 9, 11 \}$

$C = \{ 1, 2, 3, 4, 10, 14 \}$

Maka

a) $A - B = \{ 4, 6, 8, 12 \}$

b) $A - C = \{ 6, 8, 12 \}$

c) $B - A = \{ 0, 5, 7, 9, 11 \}$

d) $B - C = \{ 0, 5, 7, 9, 11)$

1.6 HUKUM OPERASI HIMPUNAN

- Hukum Komutatif

  a. $A \cup B = B \cup A$

  b. $A \cap B = B \cap A$

- Hukum Asosiatif

  a. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

  b. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

- Hukum Distributif

  a. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

  b. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

- Hukum Demorgan

  a. $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$

  b. $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$

- Hukum Idempoten

  a. $A \cup A = A$

  b. $A \cap A = A$

- Hukum Kelengkapan

  a. $\phi^C = S$

  b. $S^C = \phi$

  c. $(A^C)^C = A$

  d. $A \cup A^C = S$

  e. $A \cap A^C = \phi$

Contoh Soal

Hasil penelitian yang dilakukan terhadap 250 KK warga suatu desa menyatakan 60 KK pemilik sawah dan 110 pengarap sawah. Disamping itu ada pula 100 orang yang bukan pemilik sawah maupun pengarap sawah. Tentukanlah banyak KK sebagai pemilik sekaligus pengarap sawah.

Penyelesaian :

$n(S) = 250$, $n(A) = 60$, $n(B) = 110$

dan $n(A \cup B)^C = 100$

maka $n(A \cap B) = \ldots\ldots ?$

$n(A \cup B) = n(S) - n(A \cup B)^C$

$= 250 - 100 = 150$

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

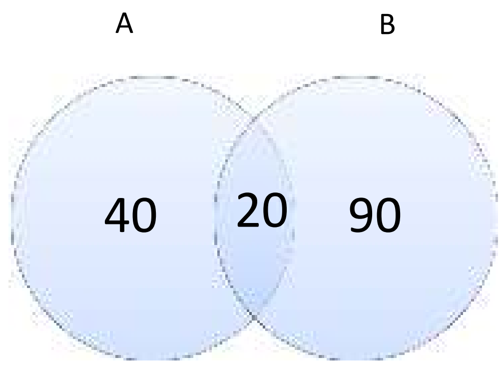
$150 = 60 + 110 - n(A \cap B)$

$150 = 170 - n(A \cap B)$

$n(A \cap B) = 170 - 150 = 20$

Jadi ada 20 KK yang merupakan sebagai pemilik sawah dan sekaligus penggarap sawah.

Diagram Venn



1.7 SOAL-SOAL LATIHAN

1. $B = \{ x \mid x < 4 , x \text{ bilangan asli} \}$

a. Ubahlah cara penulisan himpunan B

b. Berapa banyak himpunan bagian dari B? sebutkan

2. $P = \{ 1, 2, 3 \}$, $Q = \{ 3, 4, 5, 6 \}$ dan $R = \{ 6, 7, 8 \}$

Tentukan

a. $P \cup (Q \cap R)$ d. $(P \cap Q) \cup (P \cap R)$

b. $(P \cup Q) \cap (P \cup R)$ e. $(P \cap Q \cap R)$

c. $P \cap (Q \cup R)$ f. $(P \cup Q \cup R)$

3. Diketahui

$S = \{ 0, 1, 2, . . . 10 \}$

$A = \{ 1, 3, 5, 7, 9 \}$

$B = \{ 0, 2, 3, 4, 7, 8, 9)$

$C = \{ 2, 3, 5, 6, 10 \}$

Tentukanlah

a. $A \cap B \cap C$ d. B^C

b. $(A \cup B)^C$ e. $A^C \cap B^C$

c. $(A \cap B \cap C)^C$ f. $(B \cap C)^C$

4. Dari hasil survey terhadap 80 mahasiswa didapat data sbb 42 lulus

   mat.ekonomi, 33 lulus statistik , 35 lulus eko.mikro, 12 lulus mat.eko

   & statistik, 17 lulus mat.eko & Eko.mikro, 10 lulus statistik & eko.mikro serta 7 lulus ketiga

Hitunglah Jumlah mhs yg tidak lulus ketiga mata kuliah tsb

BAB 2 RELASI DAN FUNGSI

PEMBAHASAN MATERI

Bab ini membahas pemahaman tentang pengertian relasi dan fungsi,, penulisan relasi dan fungsi, batasan relasi dan fungsi, perkalian cartesius, notasi dan nilai-nilai fungsi , grafik suatu fungsi , unsure-unsur suatu fungsi , macam-macam fungsi, setra fungsi umum dan fungsi khusus.,

TUJUAN INSTRUKSIONAL KHUSUS

Setelah selesai mempelajari bab ini, Mahasiswa diharapkan mampu

1. Memahami dan menjelaskan pengertian dari relasi dan fungsi
2. Memahami dan menjelaskan cara penulisan relasi dan fungsi
3. Memahami dan menjelaskan batasan relasi dan fungsi
4. Memahami dan dan menjelaskan perkalian cartesius

5. Memahami dan menjelaskan notasi suatu fungsi
6. Memahami dan menjelaskan nilai-nilai fungsi
7. Memahami dan mengambarkan grafik suatu fungsi
8. Memahami dan menjelaskan unsure-unsur dari fungsi
9. Memahami dan menjelaskan macam-macam fungsi
10. Memahami dan menjelaskan fungsi umum dan fungsi khusus

2.1 PENDAHULUAN

Kejadian dalam dunia nyata umumnya tidak ada yang berdiri sendiri-sendiri melainkan berhubungan satu sama lainnya atau ada kaitannya antara satu kejadian dengan kejadian yang lainnya. Demikian juga khususnya dalam dunia bisnis dan ekonomi. Variable ekonomi yang satu berhubungan dengan variable ekonomi yang lainnya atau dipengaruhi oleh variable lainnya. Hubungan antara variable tersebut dapat dinyatakan dalam model matematika yang disebut relasi atau fungsi

2.2 PENGERTIAN RELASI

Relasi himpunan A dan B adalah suatu hubungan dimana ada satu atau lebih anggota di himpunan A yang mempunyai hubungan dengan satu atau lebih anggota di himpunan B.

Jika R suatu relasi dari himpunan A ke B, maka dengan memakai notasi himpunan, relasi dapat dinyatakan sebagai

$R = \{ (x, y) ; x \varepsilon A \text{ dan } y \varepsilon B \}$

Relasi ini dapat dinyatakan dengan beberapa cara yaitu

a) Dengan diagram anak panah

Suatu relasi antara himpunan A dan B adalah dengan memasangakan antara anggota A ke anggota himpunan B dengan menggunakan anak panah

b) Dengan Pasangan berurutan

Adalah anggota pertama dari pasangan itu berasal dari himpunan A dan anggota keduanya adalah berasal dari himpunan B.

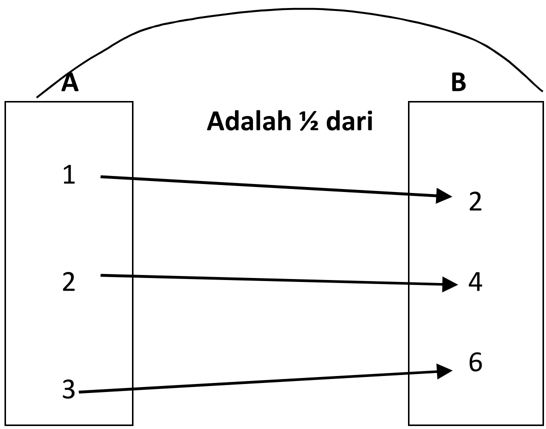
c) Dengan Grafik Cartesius

Pasangan setiap anggota dengan grafik relasi dengan menggunakan koordinat cartesius

Contoh

Bila A = { 1 , 2 , 3 } dan B = { 2, 4 , 6 } , dan jika x Ɛ A Dan y Ɛ B, maka relasi " x setengah dari y " Maka tampilan relasi tersebut sbb :

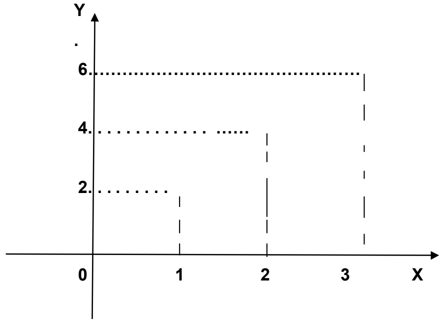
1) Dengan Anak Panah



2) Dengan Pasangan Berurutan

R = { (1 , 2), (2 , 4), (3 , 6) }

3) Dengan Grafik Cartesius



2.3 PENGERTIAN FUNGSI

Fungsi suatu himpunan A dan B adalah suatu hubungan dimana setiap anggota himpunan di A tepat berpasangan satu saja anggota di himpunan B atau fungsi adalah relasi khusus dimana setiap anggota di A tepat hanya berpasangan satu anggota di himpunan B

$$f : A \longrightarrow B$$

Artinya jika x Ɛ A dan y Ɛ B dan a dikaitkan dengan b maka f (a) = b dengan

1. A disebut daerah asal (domain)

2. B disebut daerah kawan (kodomain)
3. b disebut bayangan dari a
4. Himpunan semua bayangan dari setiap $x \in A$ disebut daerah hasil / derah jelajah atau range

Jika fungsi tersebut mengaitkan $x \in A$ dengan $y \in B$ maka

$f(x) = y$ atau $f : x \longrightarrow y$

Contoh :

$f(x) = 2x + 5$ atau $f(x) = y = 2x + 5$

Nilai fungsi tersebut untuk $x = 0, 1, 2, ½$

Adalah :

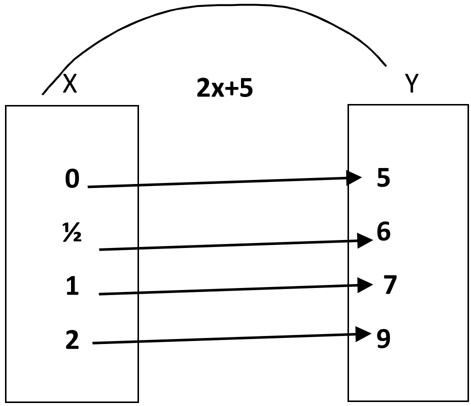
$$f(0) = 2.0 + 5 = 5$$

$$f(1) = 2.1 + 5 = 7$$

$$f(2) = 2.2 + 5 = 9$$

$$f(½) = 2.½ + 5 = 6$$

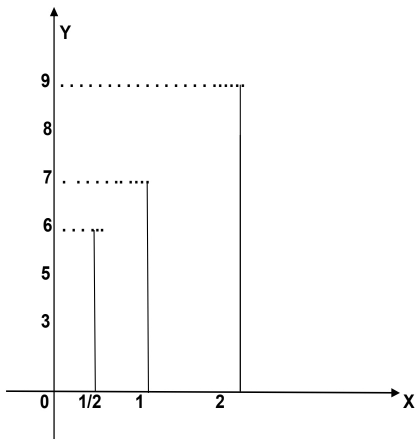
❖ Dengan Anak pan



❖ Dengan pasangan berurutan

2. R = { (0,5), (½, 6) ,(1, 7),(2 , 9) }

❖ Dengan Grafik Cartesius



2.4 PERKALIAN CARTESIUS

Perkalian Cartesius adalah merupakan perkalian dua buah himpunan jika A dan B dua himpunan maka A x B adalah sebuah hinpunan yang anggota-anggotanya terdiri dari seluruh pasangan berurut (x, y) dengan x ε A dan y ε B atau A x B = { (x , y) ; x ε A dan y ε B }

Contoh 1

Jika A = { 2 , 5 , 7 } dan B = { a , b , c } maka

A X B = { (x , y) ; x ε A dan y ε B }

{ (2, a), (2 , b), (2 , c), (5 , a), (5 , b), (5 , c), (7 , a), (7 , b), (7 , c) }

B X A = { (x , y) ; x ε B dan y ε A }

{ (a , 2), (b , 2), (c , 2), (a , 5), (b , 5), (c, 5), (a , 7), (b , 7), (c , 7) }

Jika R ε (A X B) maka R disebut relasi dari himpunan A ke himpunan B

Contoh 2

Jika P = { x , y , z } dan Q = { 1 , 10 , 100 }

Maka

PXQ = { (x ,1), (x ,10), (x, 100), (y ,1), (y ,10), (y ,100), (z,1), (z,10), (z,100 }

QXP = { (1,x), (10,x), (100,x), (1 , y), (10 , y), (100, y), (1 , z), (10 , z), (100 , z }

Notasi Fungsi : $f : A \longrightarrow B$

Jika fungsi tersebut mengaitkan $x \in A$ dengan $y \in B$ maka

$f(x) = y$ atau $f : x \longrightarrow y$

Contoh :

$f(x) = 2x + 5$ atau $f(x) = y = 2x + 5$

Nilai fungsi tersebut untuk x = 0 , 1 , 2 , ½

Adalah : f (0) = 5 , f (1/2) = 6, f (1) = 7 dan f (2) = 9

2.5 GRAFIK SUATU FUNGSI

Grafik atau kurva suatu fungsi secara umum dapat dibuat dengan dua cara yaitu :

1) Memasukkan himpunan pasangan antara daerah domain dengan kodomain yang memenuhi suatu funsi pada grafik cartesius

kemudian menghubungkan titik-titik tersebut.

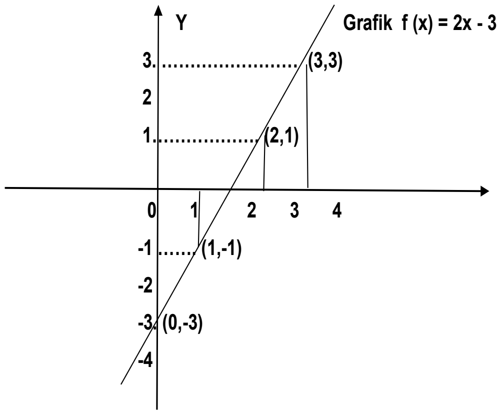
2) Dengan menghubungkan titik-titik potong suatu fungsi yang memotong sumbu datar (x) dan yang memetong dengan sumbu tegak (y)

Contoh

Jika diketahui fungsi F (x) = 2 x - 3 , maka gambar grafiknya Sbb

1) Menentukan dan menghubungkan titik-titik yang dilalui kurva

x	. . .	-1	0	1	2	. . .
y	. . .	-5	-3	-1	1	. . .
{ x y}	. . .	(-1 . 5)	(0 , 3)	(1,-1)	(2 ,1)	. . .



2) Dengan fungsi memotong di sumbu x dan sumbu y

Jika memotong sumbu x maka y = 0

Y = 2x - 3

0 = 2x - 3

-2x = -3

x = 3/2 , maka titik potong pada sumbu x adalah (3/2 , 0)

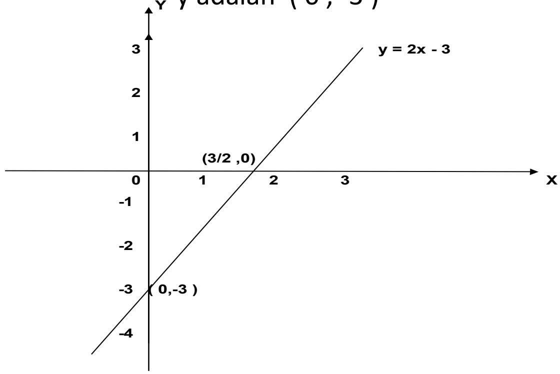
Jika memotong sumbu y maka x = 0

Y = 2x - 3

Y = 2 (0) - 3

Y = - 3 , maka titik potong pada sumbu

y adalah (0 , -3)



2.6 UNSUR-UNSUR SUATU FUNGSI

- **Variabel**

  Adalah suatu besaran yang nilainya bisa berubah – ubah. Menurut sifatnya variable terdiri dari variable terikat (dependen) adalah variable yang nilainya tergantung pada variable bebasnya dan variable bebas (independen) adalah variable yang nilainya tidak tergantung pada nilai variable lainnya.

- **Koefesien**

  Adalah bilangan atau konstanta tertentu yang nilainya telah ditetapkan yang berhubungan dengan suatu variable dalam sebuah fungsi dan biasanya terletak di depan suatu variable.

- **Konstanta**

  Adalah bilangan yang jika ada yang ikut membentuk sebuah fungsi dan tidak terkait langsung dengan suatu variable.

  Contoh $f(x) = y = 2x - 3$

- Variabel pada fungsi diatas adalah x dan y
- Koefesien pada fungsi di atas adalah 2
- Konstanta pada fungsi di atas adalah - 3

2.7 MACAM – MACAM FUNGSI

- Berdasarkan dari operasinya, maka ada dua macam fungsi yaitu fungsi Linier dan fungsi Tan-linier. Fungsi linier adalah setiap fungsi yang variabelnya berpangkat satu sedangankan fungsi tan-linier adalah fungsi yang variabelnya berpangkat lebih dari satu.

Contoh

Fungsi linier ; $f(x) = 5x + 4$ atau $f(y) = 3y + 2$

Fungsi Tan-linier ; $f(x) = 3x^3 + 2$ atau $F(y) = y^2 - 7y + 2$

- Berdasarkan hubungan antara variable-variabel yang terdapat dalam suatu fungsi maka fungsi fungsi terdiri dari fungsi implicit dan fungsi eksplisit. Fungsi eksplisit adalah fungsi yang variable bebas dan variable terikatnya berada pada ruas yang berbeda. Sedangkan fungsi implicit adalah fungsi yang variable bebas dan variable terikatnya berada dalam ruas yang sama.

Contoh

Fungsi Implinsit ; $2x^2 + 5y^5 + 2 = 0$

Fungsi Eksplisit ; $y = 4x^3 + 2x - 5$

- Berdasarkan dari jumlah variable bebasnya maka fungsi terdiri dari fungsi uni-variabel dan fungsi multi-variabel. Uni-variabel adalah fungsi yang terdiri dari satu variable bebas sedangkan fungsi multi-variabel adalah fungsi yang memiliki lebih dari satu variable bebas.

Contoh

Fungsi Uni-variabel; $y = 4x^2 + 5x - 12$

Fungsi Multi-variabel; $z = 2x^2 + xy + y^2 + 3$

2.8 SOAL-SOAL LATIHAN

1. Diketahui $y = x^2 + 2x - 4$

   Hitunglah nilai-nilai fungsi untuk $x = -2, 0, 1, 3, 5, a$

2. Diketahui $y = x^2 + 2$

   Gambarkan grafiknya

3. Diketahui himpunan A = { 1, 2, 3 } dan B = { 2, 3, 4, 5, 6 }

   jika x ε A dan y ε B maka relasi " x setengah kali y" nyatakanlah relasi tersebut dengan diagram anak panah, pasangan berurutan dan dengan grafik cartesius

4. Nyatakanlah fungsi $y = 2x^2 - 2$ untuk $x = 1, 2, 3, 4$ dengan diagram anak panah dan pasangan berurutan dan garafik cartesius

5. Diketahui $f(x) = 8x + 4$

   Tentukanlah

   a. $f(-3)$ c. $f(x)$ jika $x = 6$

   b. $f(4)$ d. x jika $f(x) = 26$

6. Nyatakan relasi berikut dalam pasangan berurut .

   a. Relasi “ kelipatan dari “ dari himpunan A={1,2,3,4} ke himpunan B={1,2,4,6,8,9,10,14,16}

   b. Relasi “ kurang dari ” dari himpunan A = {1,2,3} ke himpunan B = {1,2,3,4,5}

BAB 3 FUNGSI LINIER DAN PERSAMAAN GARIS LURUS

PEMBAHASAN MATERI

Fungsi linier adalah fungsi f pada domain R yang ditentukan oleh $f(x) = mx + n$ dengan m , n bilangan reil (R) dan $m \neq 0$. Pada bab ini membahas pemahaman tentang pengertian fungsi linier, grafik fungsi linier, gradient , persamaan-persamaan garis lurus, dan hubungan dua buah garis lurus,

TUJUAN INSTRUKSIONAL KHUSUS

Setelah selesai mempelajari bab ini, Mahasiswa diharapkan mampu

1. Memahami dan menjelaskan pengertian tentang fungsi linier
2. Memahami dan menjelaskan grafik fungsi linier
3. Memahami dan menjelaskan gradient
4. Memahami dan menjelaskan persamaan-persamaan garis lurus

5. Memahami dan menjelaskan hubungan dua buah garis

3.1 PENDAHULUAN

Fungsi linier adalah bentuk fungsi yang paling sederhana. Banyaknya hubungan antara variable ekonomi, dalam jangka pendek dianggap linier. Pengetahuan tentang fungsi linier sangat diperlukan untuk dapat memahami fungsi-fungsi yang lebih kompleks. Fungsi linear atau fungsi garis lurus juga merupakan sebuah hubungan fungsional antar variabel tidak bebas y dengan variabel bebas x yang berpangkat satu. Fungsi linear dengan hanya menggunakan satu variabel x disebut sebagai fungsi linear sederhana. Jika menggunakan berbagai variabel bebas x (lebih dari satu variabel), maka disebut fungsi linear berganda.

3.2 PENGERTIAN FUNGSI LINIER

Jika ada suatu hubungan sedemikian hingga bila *x* diberikan suatu nilai dan oleh hubungan itu dapat ditentukan suatu nilai *y*, maka dikatakan bahwa *y* adalah fungsi dari x biasanya ditulis $y = f(x)$. x disebut variabel bebas (Independent variabel) dan y disebut dengan variabel tak bebas (dependent variabel). y variabel tak bebas sebab nilainya bergantung pada nilai x.

Himpunan yang dapat dijangkau oleh x dinamakan daerah asal (domain) dari fungsi dan himpunan bilangan yang dapat dijangkau disebut daerah hasil (range) atau daerah jangkauan dari fungsi. Dalam hal ini x dan y merupakan pasangan urut (x, y) dimana x sebagai unsure pertama dan y sebagai unsur kedua.

Pengertian mengenai fungsi linier penting dalam ekonomi, baik dalam ekonomi mikro maupun ekonomi makro, ekonomi moneter dan bagian-bagian dalam teori tersebut.

Bentuk umum fungsi linier / persamaan garis adalah :

$F(x) = y = mx + n$

m adalah gradien atau koefisien arah,

n adalah suatu konstanta

x dan y adalah variable

$m \neq 0$

m , n adalah anggota bilangan Real

3.3 GRAFIK FUNGSI LINIER

Untuk mengambarkan grafik fungsi linier cukup dengan menggunakan titik potong persamaan linier terhadap sumbu datar x dan sumbu tegak y sebagai berikut

Persamaan fungsi linier ; $y = m x + n$, maka grafiknya

- Memotong sumbu x maka $y = 0$

  $y = m x + n$

  $1 = m x + n$

  $-mx = n$

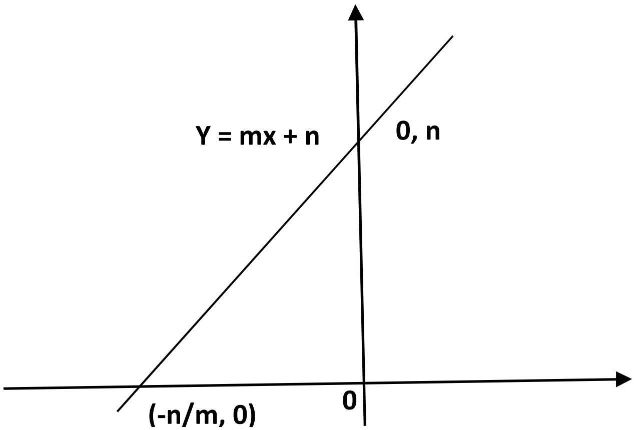
  $x = - n/m$ sehingga titik potong pada sumbu x adalah $(- n/m , 0)$

- Memotong sumbu y maka $x = 0$

  $y = m x + n$

  $y = m (0) + n$

y = n sehingga titik potong pada sumbu y adalah (0 , n)



Contoh

Gambarlah grafik dari $y = -2x + 4$

Penyelesaian

- Memotong di sumbu x maka $y = 0$

  $Y = -2x + 4$

  $0 = -2x + 4$

  $2x = 4$

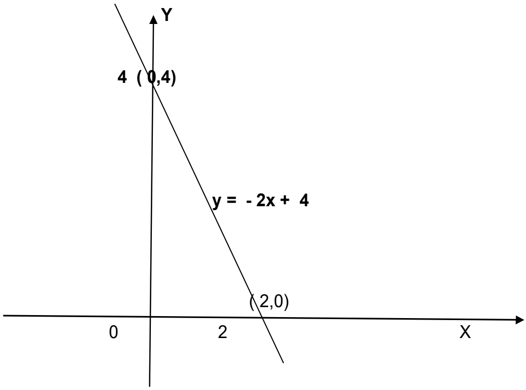
  $X = 2$ maka titik potong pada sumbu x adalah (2 , 0)

- Memotong di sumbu y maka $x = 0$

Y = - 2x + 4

y = - 2 (0) + 4

y = 4 maka titik potong pada sumbu y adalah (0 , 4)



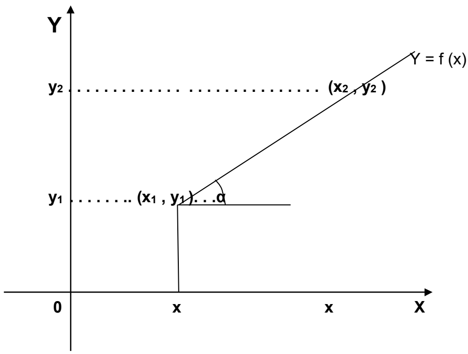
3.4 GRADIEN GARIS LURUS

Jika fungsi linier y = f (x) = mx + n digambarkan dalam bidang cartesius maka grafiknya berupa garis lurus. Kemiringan garis (slope garis atau gradient garis) pada setiap titik yang terletak pada garis lurus tersebut adalah tetap yaitu sebesar **m.**

Slope atau gradient garis lurus y = f (x) adalah hasil bagi antara perubahan dalam variable terikat dengan perubahan dalam variable bebasnya. Sedangkan secara geometris gradient/kemiringan garis lurus adalah sama dengan nilai tangent sudut yang dobentuk oleh garis lurus tersebut dengan sumbu x positif dimulai dari sumbu x positip berlawanan arah jarum jam. Jadi gradient garis lurus tersebut dapat dinyatakan sebagai berikut ;

$$m = \frac{\text{Perubahan dalam variable terikat}}{\text{Perubahan dalam variable bebas}}$$

$$= \frac{y_2 - y_1}{X_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \text{tg}\,\alpha$$



3.5 PERSAMAAN-PERSAMAAN GARIS LURUS

- Persamaan garis lurus melalui titik (0,0) dengan gradient m adalah

$$y = m x$$

Contoh

Persamaan garis lurus k yang melalui titik (0,0) yang memiliki gradient -5 adalah

$$y = m x$$
$$= -5 x$$

- Pers.garis lurus bergradien m dan memotong sumbu y di titik (0 , n) adalah

$$y = m x + n$$

Contoh

Persamaan garis lurus k yang bergradien 3 dan melalui titik (0, -5) adalah

$$y = m x + n$$
$$= 3 x - 5$$

- Pers.garis lurus dengan gradien m, yang melalui titik (x_1 , y_1) adalah

$$y - y_1 = m (x - x_1)$$

Contoh

Persamaan garis lurus k yang bergradien 2 dan melalui titik (-3, 5) adalah

$$y - 5 = 2 (x + 3)$$

$$y - 5 = 2x + 6$$

$$y = 2x + 6 + 5$$

$$y = 2x + 11$$

- Pers.garis yang melalui dua buah titik A(x_1 , y_1) dan B (x_2 , y_2) adalah

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

Contoh

Persamaan garis lurus yang melalui titik A (2, 4) dan B (4 , 3) adalah

$$\frac{Y - 4}{3 - 4} = \frac{x - 2}{4 - 2}$$

$$2 (y - 4) = -1 (x - 2)$$

$$2y - 8 = -x + 2$$

$$2y = -x + 2 + 8$$

$$2y = \frac{-x + 10}{2}$$

$$y = ½x + 5$$

- Pers.Segmen Suatu Garis Lurus

Pers. Garis lurus yang memotong sumbu X di x_1

dan sumbu Y di y_1 adalah

$$\frac{x}{x_1} + \frac{y}{y_1} = 1$$

Contoh

Persamaan garis lurus yang memotong sumbu x pada x = 3 dan memotong sumbu y pada y = 7 adalah

$$\frac{X}{3} + \frac{y}{5} = 1$$

$$\frac{5x + 3y}{15} = 1$$

$$5x + 3y = 15$$
$$3y = -5x + 15$$
$$y = -\frac{5x}{3} + 5$$

- Pers.Garis Lurus $Ax + By + C = 0$

Variabel x dan y terletak pada ruas yang sama maka disebut persamaan atau fungsi implisit. Setiap fungsi eksplisit bisa di rubah ke bentuk implisit tapi belun tentu sebaliknya.

Contoh

Persamaan fungsi eksplisit menjadi fungsi implisit adalah

$$y = -\frac{4}{3}x + \frac{5}{3}$$

$$3y = -4x + 5$$

$$3y + 4x - 5 = 0$$

Persamaan fungsi implicit menjadi fungsi eksplisit adalah

$$4x + 2y - 6 = 0$$

$$2y = -4x + 6$$

$$y = \frac{-4x + 6}{2}$$

$$y = -2x + 3$$

3.6 HUBUNGAN DUA GARIS LURUS

Jika Dua buah garis lurus $K_1 : y = m_1 x + n_1$

$K_2 : y = m_2 x + n_2$

Maka

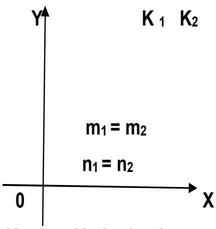
1) Dua garis lurus berimpit (K_1 dan K_2) jika $m_1 = m_2$ dan $n_1 = n_2$

2) Dua garis lurus sejajar (K_1 dan K_2) jika $m_1 = m_2$ dan $n_1 \neq n_2$

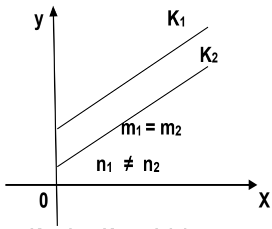
3) Dua garis lurus berpotongan (K_1 dan K_2) jika $m_1 \neq m_2$

4) Dua garis lurus saling tegak lurus (K dan K) jika $m_1 . m_2 = -1$

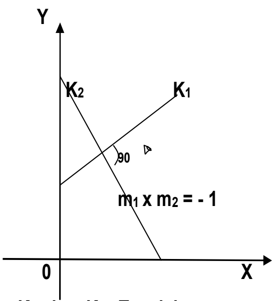
5)



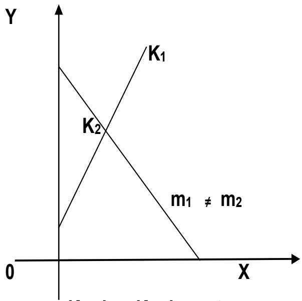
K₁ dan K₂ berimpit



K_1 dan K_2 sejajajr



K_1 dan K_2 Tegak lurus



K_1 dan K_2 berpotongan

Contoh:

Tentukanlah Persamaan garis lurus K yang ditarik dari titik (3 , 4)

Yang sejajar dan yang tegak lurus dengan garis L ; $y = -2x + 1$ adalah sbb

Garis L : $y = -2x + 1$ jadi $m_2 = -2$

- ❖ Garis K // garis L syaratnya $m_K = m_L = -2$

Persamaan garis melalui titik(x_1 , y_1) yaitu (3, 4) adalah

$y - y_1 = m_K (x - x_1)$

$y - 4 = -2 (x - 3)$

$y - 4 = -2x + 6$,

$y = -2x + 10$

- ❖ Garis K $\perp$ L syaratnya $m_K \times m_L = -1$

Maka $m_K = -1/2$

Persamaan garis melalui titik (3 , 4) dengan $m_K = -½$

Adalah

$y - y_1 = m_K (x - x_1)$

$y - 4 = -1/2 (x - 3)$

$y - 4 = -\frac{1}{2} x + \frac{3}{2}$

$$y = \frac{-1}{2}x + \frac{3}{2} + 4$$

$$y = \frac{-1}{2}x + \frac{11}{2}$$

3.7 Soal – Soal Latihan

1. Gambarlah grafik dari

   a) $y = -2x + 4$

   b) $y = 3x - 3$

   c) $2y - 6x + 4 = 0$

2. Tentukanlah persamaan garis lurus k, yang ditarik dari titik A (4, 5)

   a. sejajar dengan garis $y = -2x + 1$

   b. Yang tegak lurus dengan garis $y = -2x + 1$

   c. yang berpotongan dengan garis $y = x - 2$

3. carilah titik potong garis – garis berikut

   a) $y = 3x + 2$ dan garis $y = -x - 4$

   b) $y = -x + 2$ dan garis $y = 5x - 2$

   c) $2y - 6x + 4$ dan garis $y + 2x - 3$

4. Carilah persamaan garis yang melalui titik berikut dan tentukanlah gradien garis lurus – garis lurus tersebut.

   a) A (2, 5) dan B (-1 , 4)

   b) P (- 1 , 3) dan Q (- 2 , -5)

   c) M (0 , 3) dan N (- 4 , 0)

   d) P (2, 3) dan Q (4, 6)

BAB 4 APLIKASI FUNGSI LINIER
DALAM BIDANG EKONOMI

PEMBAHASAN MATERI

Pada bab ini akan dibahas mengenai aplikasi atau penerapan fungsi linier dalam bidang ekonomi dan bisnis yang dibatasi fungsi permintaan dan fungsi penawaran, titik keseimbangan pasar, pengaruh pajak dan subsidi terhadap keseimbangan pasar, fungsi konsumsi dan analisis pulang pokok

TUJUAN INSTRUKSIONAL KHUSUS

Setelah selesai mempelajari bab ini, Mahasiswa diharapkan mampu

1. Memahami dan menjelaskan pengertian fungsi permintaa
2. Memahami dan menjelaskan pergertian fungsi penawaran
3. Memahami dan menjelaskan keseimbangan pasar

4. Memahami dan menjelaskan pengaruh pajak terhadap keseimbangan pasar
5. Memahami dan menjelaskan pengaruh subsidi terhadap keseimbangan pasar
6. Memahami dan menjelaskan keseimbangan pasar dua jenis barang
7. Memahami dan menjelaskan pengaruh pajak dan subsidi terhadap keseimbangan pasar dua jenis barang.
8. Memahami dan menjelaskan fungsi konsumsi
9. Memahami dan menjelaskan analisis pulang pokok

4.1 PENDAHULUAN

Di dalam analisa ekonomi, penerapan suatu fungsi memegang peranan penting, oleh sebab itu variable-variabel fenomena ekonomi bisnis yang terjadi satu sama lainnya saling berhubungan. Hubungan fungsional antara variable ekonomi yang bersifat kuantitatif dapat diabtraksi dan diformulasikan dalam bentuk suatu fungsi. Didalam menggambarkan suatu fungsi, umumnya variable yang terikat diletakan pada sumbu tegak dan variable bebas diletakan pada sumbu datar.

4.2 FUNGSI PERMINTAAN (DEMAND)

Fungsi permintaan suatu barang (jasa) adalah fungsi yang menyatakan hubungan antara tingkat harga dengan kuantitas barang (jasa) yang diminta oleh konsumen pada kurun waktu tertentu, dengan asumsi variable bebas lainnya yang mempengaruhi kuantitas barang yang diminta kostan. Variabel bebas lainnya yang dimaksud antara lain adalah tingkat harga barang subsitusi, tingkat pendapatan konsumen, selera konsumen dan jumlah konsumen yg potensial.

Hukum permintaan berbunyi :

Apabila harga naik maka jumlah barang yang diminta akan mengalami penurunan, dan apabila harga turun maka jumlah barang yang diminta akan mengalami kenaikan

Dalam hukum permintaan jumlah barang yang diminta berbanding terbalik dengan tingkat harga barang. Kenaikan harga barang akan menyebabkan berkurangnya jumlah barang yang diminta. Hal ini dikarenakan naiknya harga menyebabkan turunnya daya beli konsumen dan akan berakibat berkurangnya jumlah permintaan. Naiknya harga barang akan menyebabkan konsumen mencari barang pengggganti yang harganya lebih murah.

Faktor – faktor yang mempengaruhi Permintaan adalah:

- Harga barang itu sendiri
- Harga barang-barang lain yang bersifat substitutive
- Pendapatan masyarakat
- Selera dan prilaku masyarakat
- Jumlah penduduk

Notasi

$q = f(p)$ fungsi permintaan terhadap harga

Persamaan fungsi permintaan yang linier

$$q = a - bp$$

Keterangan :

q : kuantitas barang,

p : harga per unit barang

a : konstanta

b : slope kurva negatip

Contoh :

fungsi permintaan f_D : q = 10 - p/5

1. Batas Nilai q dan p adalah

   untuk q = 0 maka p = ... ?

Penyelesaiannya

$$q = 10 - p/5$$

$$0 = 10 - \frac{p}{5} \rightarrow \frac{p}{5} = 10 \quad \text{maka } p = 50$$

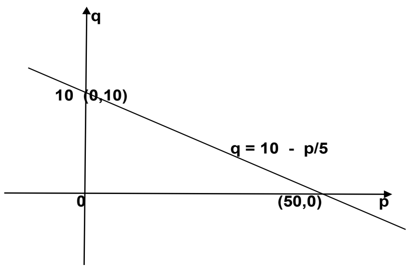
untuk p = 0 maka q = ……,?

Penyelesaiannya

$$q = 10 - p/5$$

$$q = 10 - 0/5 \quad \text{maka} \quad q = 10$$

2. Grafiknya



4.3 FUNGSI PENAWARAN (SUPPLY)

Fungsi penawaran suatu barang (jasa) adalah fungsi yang menyatakan hubungan antara tingkat harga dengan kuantitas barang (jasa) yang ditawarkan oleh produsen pada kurun waktu tertentu, dengan asumsi variable bebas lainnya yang mempengaruhi kuantitas barang yang ditawarkan kostan. Variabel bebas lainnya yang dimaksud antara lain adalah tingkat harga barang subsitusi, tingkat pendapatan konsumen, selera konsumen dan jumlah konsumen yg potensial.

Hukum penawaran berbunyi :

Bila harga tingkat barang mengalami kenaikan maka jumlah barang yang ditawarkan akan naik,dan bila tingkat harga barang turun maka jumlah barang yang ditawarkan akan turun

Dalam hukum penawaran jumlah barang yang ditawarkan akan berbanding lurus dengan tingkat harga, di hukum penawaran hanya menunjukkan hubungan searah antara jumlah barang yang ditawarkandengan tingkat harga.

Faktor – faktor yang mempengaruhi Penawaran adalah :

- ❖ Harga barang
- ❖ Harga barang-barang lain yang bersifat substitutive
- ❖ Biaya produksi
- ❖ Tujuan perusahaan
- ❖ Pajak
- ❖ Tingkat teknologi yang digunakan
- ❖ Perkiraan harga barang di masa datang

Notasi

$q = f(p)$ fungsi penawaran terhadap harga

Persamaan fungsi penawaran yang linier

$$q = a + bp$$

Keterangan

q : kuantitas barang,

p : harga per unit barang

a : konstanta

b : slope kurva positip

Contoh :

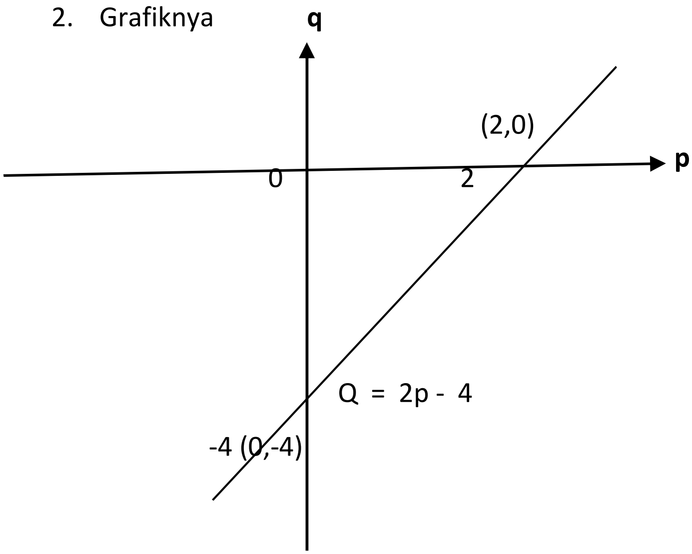
fungsi penawaran f_S : $q = 2p - 4$

1. Batas Nilai q dan p adalah

   untuk $q = 0$ maka $p = 2$

   untuk $p = 0$ maka $q = -4$

2. Grafiknya



4.4 KESEIMBANGAN PASAR

Keseimbangan pasar akan tercipta bila harga barang (jasa) yg ditawarkan produsen sama dengan harga yang diminta konsumen atau kuantitas barang (jasa) yang ditawarkan oleh produsen sama dengan kuantitas barang yang diminta oleh konsumen

Titik Keseimbangan Pasar (Ekuilibrium)

Secara geometris tititk potong antara fungsi permintaan suatu barang dengan fungsi penawaran atau titik potong grafik garis fungsi permintaan dengan grafig garis fungsi penawaran.

Notasi : $p_D = p_S$ atau $q_D = q_S$

Contoh :

Fungsi permintaan f_D ; $q = -1/3\ p + 5$

Fungsi penawaran f_S : $q = 2/3\ p + 2$

Maka titik keseimbangan pasar (ekuilibrium) adalah

$$f_D = f_S$$

Maka

$$\frac{-1}{3}\ p + 5 = \frac{2}{3}\ p + 2$$

$$\frac{-1}{3}\ p - \frac{2}{3}\ p = 2 - 5$$

$$-p = -3$$

$$P = 3$$

Untuk p = 3 maka $q = \frac{2}{3} p + 2$

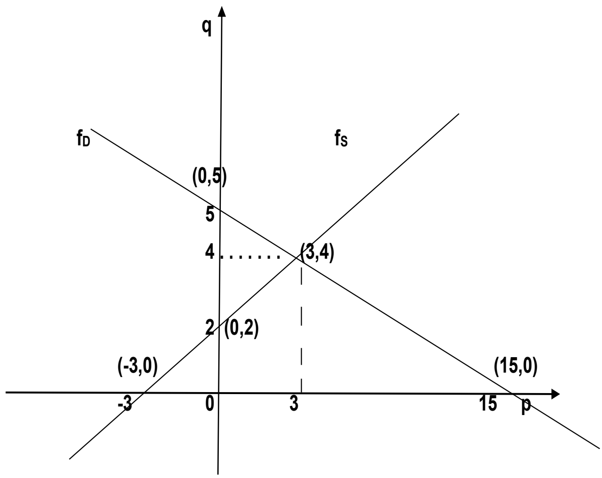
$$q = 2/3\ (3) + 2$$

$$q = 4$$

Maka titik keseimbangan pasar E (3 , 4)

Gambar Grafiknya dapat dilakukan dengan langkah-langkah berikut

Gambar grafik fungsi permintaan dan penawaran dalam satu sumbu koordinat sehingga akan memperlihatkan titik potong garis fungsi permintaan dan garis penawaran yang mana titik potong tersebut adalah titik keseimbangan pasar (ekuilibrium)



4.5 PENGARUH PAJAK TERHADAP KESEIMBANGAN PASAR

Penerimaan pajak merupakan salah satu sumber pendapatan pemerintah, bahkan merupakan sumber pendapatan utama. Dengan ini lah pemerintah menjalan kan roda kegiatannya sehari-hari, membangun prasarana publik seperti jalan, pembangunan jembatan, membayar cicilan hutang Negara dll.

Pajak penjualan yang dikenakan pemerintah terhadap suatu barang (jasa) mengakibatkan harga barang tersebut akan naik dan sebaliknya kuantitas barang yang diminta oleh konsumen akan turun .Besarnya pajak penjualan akan mengeser kurva penawaran keatas dan kurva permintaan tetap.

Notasi :

f_{Dt} : $p = f(q)$

f_{St} : $p = g(q) + t$

Titik keseimbangan pasar akan terjadi apabila: $p_{Dt} = p_{St}$

Contoh :

Titik equibilirium Soal di atas setelah kena pajak sebesar t = 2 adalah sbb:

f_{Dt} : $q = -1/3\,p + 5 \rightarrow p = 15 - 3q$

f_{St} : $q = 2/3\,p + 2 \rightarrow p = -3 + 3/2\,q$

Titik E_t adalah $p_{Dt} = p_{St} + 2$

$$15 - 3q = -3 + 3/2\,q + 2$$

$$-3q - 3/2\,q = -1 - 15$$

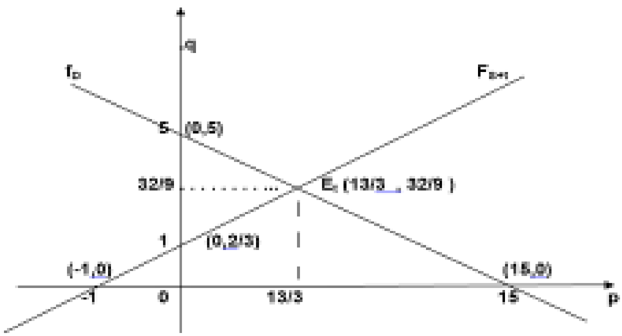
$$-6q - 3q = -32$$

$$-9q = -32$$

$$q = 32/9 \quad , \quad p = 13/3$$

Maka keseimbnagan pasar setelah kena pajak (E_t) =(13/3 , 32/9)

Gambar grafiknya



Titik Ekuilibrium E (p_E , q_E) akan mengalami perubahan setelah kena pajak Sehingga keseimbangan pasar setelah kena pajak sebesar t adalah E_t (p_t , q_t)

Maka :

1. Akan terjadi perubahan quantitas (Δq)&harga(Δp) yaitu

a. Perubahan Kuantitas $\Delta q = q_E - q_t$

perubahan kuantitas barang adalah kuantitas barang pada harga pasar dikurang dengan kuantitas barang pada keseimbangan pasar setelah kena pajak sebesar t

b. Perubahan Harga $\Delta p = p_t - p_E$

perubahan harga barang adalah selisih harga barang setelah kena pajak sebesar t dengan harga barang pada keseimbangan pasar sebelum kena pajak.

2. Besarnya pajak per unit yg ditanggung oleh *produsen* (t_K) dibebankan kepada *konsumen* (t_p) dan Total yang diterima oleh *pemerintah* (T) sbb

a. $t_K = \Delta p = (p_t - p_E)$

Besarnya pajak per unit barang yang akan ditanggung oleh konsumen adalah sebesar perubahan harga yang terjadi yaitu selisih harga barang setelah kena pajak dengan harga barang sebelun kena pajak Sehingga Total yang akan dibayar konsumen

$T_K = (\Delta p).(q_t)$

Perubahan harga setelah kena pajak di kalikan quantitas barang setelah kena pajak

b. Besarnya pajak yang ditanggung produsen adalah

$t_p = t -- \Delta p$

Besarnya pajak per unit barang yang akan ditanggung produsen adalah sebesar nilai pajak yang dikenakan setiap unit barang di kurang dengan perubahan harga yaitu selisih harga barang setelah kena pajak dengan sebelum kena pajak.

Besarnya total yang harus dibayar produsen

$T_p = (t -- \Delta p).q_t$

Adalah besarnya pajak dikurang dengan perubahan harga dikali dengan Guantitas barang setelah kena pajak.

c. Pajak total (T) yang diterima pemerintah adalah :

$$T = t.q_t$$
$$= T_K + T_P$$

Total pajak yang diterima pemerintah adalah total pajak yang di tanggung Konsumen ditambah dengan total pajak yang ditanggung produsen.

Contoh Soal

Diketahui f_D : $q = -2p + 24$ dan f_S : $q = 2p -- 10$ dan pemerintah menarik pajak sebesar $t = 1$

Tentukanlah

a. Harga dan kuantitas kesimbangan pasar sebelum dan sesudah dikenai pajak
b. Total pajak yang diterima pemerintah,
c. Total pajak yang ditanggung produsen
d. Total pajak dan yang ditanggung oleh konsumen
e. Prosen penurunan kuantitas barang yang terjual karena adanya pajak
f. Gambar grafinya

Penyelesaian :

a. Titik Ekuilibrium sebelum dan sesudah kena pajak adalah

f_D : $q = -2p + 24$ maka $p = -½ q + 12$

f_S : $q = 2p -- 10$ maka $p = ½ q + 5$

❖ Titik ekuilibrium sebelum kena pajak E (p_E , q_E)

$p_D = p_S$

$-\frac{1}{2} q + 12 = \frac{1}{2} q + 5$

$q = 7$ dan $p = 17/2$

Sehingga $E (p_E , q_E) = E (17/2 , 7)$

❖ Titik ekuilibrium sesudah kena pajak E_t (p_t , q_t)

$p_D = -\frac{1}{2} q + 12$,

$p_S = \frac{1}{2} q + 5 + t$

$= \frac{1}{2} q + 6$

$p_{Dt} = p_{St}$

$-\frac{1}{2} q + 12 = \frac{1}{2} q + 6$

$-q = -6$, $q = 6$ maka $p = 9$

Titik $E_t (p_t , q_t) = E_t (9 , 6)$

Keseimbangan pasar setelah kena pajak sebesar $t = 1$ adalah (9 , 6)

b. Total pajak yang diterima pemerintah (T) adalah

$T = t \cdot q_t$

$= 1 \cdot 6$

$= 6$

c. Total pajak yang ditanggung konsumen (T_K) adalah

$$T_K = \Delta p \ . \ q_t$$
$$= (p_t -- p_E) . q_t$$
$$= (9 - 17/2) . 6$$
$$= 3$$

d.Total Pajak yang ditanggung oleh produsen (T_P) adalah

$$T_P = (t - \Delta p) . q_t$$
$$= (1 - ½) . 6$$
$$= 3$$

e. Presentase penurunan kuantitas barang yang terjual karena pajak adalah:

$$\% \ \Delta q = \frac{q_E -- q_t}{q_E} . 1. 100\%$$
$$= \frac{7 - 6}{7} . 100 \%$$
$$= 14 , 28 \%$$

f. Gambar Grafiknya

f_D : $q = - 2 p + 24$ f_S : $q = 2 p - 10$

$p = - ½ q + 12$ $p = ½ q + 5$

p	12	8,5	0
p	0	7	24

p	5	6	7	8,5
q	0	2	4	7

f_{St} : $p = \frac{1}{2}q + 5 + 1$

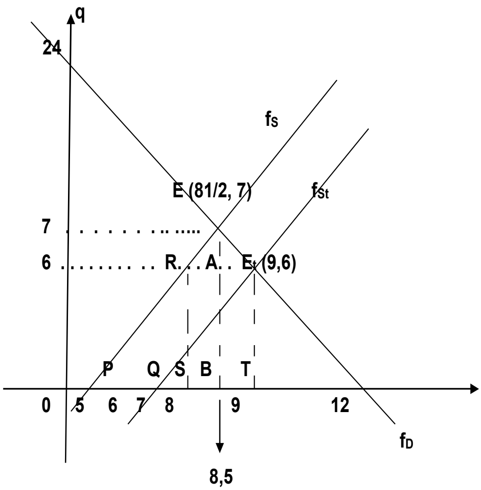
$p = \frac{1}{2}q + 6$

$-\frac{1}{2}q = -p + 6$

$q = 2p + 12$

maka $q = 2p - 12$

p	6	7	8	9	9,5
q	0	2	4	6	7



Total pajak yang diterima pemerintah = luas jajaran genjang POR E_t = 6

Total pajak yang ditanggung konsumen = luas $ABTE_t$ = 3

Total pajak yang ditanggung produsen = luas RABS = 3

4.6 PENGARUH SUBSIDI TERHADAP KESEIMBANGAN PASAR

Subsidi merupakan lawan atau kebalikan dari pajak, oleh karena itu orang sering menyebut subsidi sebagai pajak negatif. Berbeda dengan pajak yang merupakan iuran wajib masyarakat (produsen dan konsumen) kepada pemerintah, maka subsidi merupakan bantuan yang diberikan oleh pemerintah kepada masyarakat. Sehingga pengaruhnya terhadap keseimbangan pasar berlawalanan (kebalikan) dari pengaruh pajak, dengan demikian kita dapat menganalisisnya seperti kita menganalisis pengaruh pajak. Subsidi dapat bersifat spesifik dan dapat pula bersifat proporsional, namun pada bagian ini hanya diuraikan subsidi yang bersifat spesifik.

Subsidi yang diberikan atas suatu barang menyebabkan harga jual barang tersebut menjadi rendah. Dengan adanya subsidi, produsen merasa ongkos produksinya menjadi lebih rendah sehingga ia bersedia untuk menjual lebih murah barang yang diproduksinya. Akibatnya harga keseimbangan yang tercipta di pasar lebih rendah dari pada harga keseimbangan sebelum adanya subsidi, dan jumlah keseimbangan menjadi lebih banyak.

Dengan adanya subsidi yang bersifat spesifik atas suatu barang (s) kurva penawaran bergeser sejajar ke bawah, dengan penggal yang lebih kecil (lebih rendah) dari sumbu harga, sedangkan grafik fungsi permintaan tidak terpengaruh dengan adanya subsidi.

Notasi

$$f_{Dt} \ : \ p = f(q)$$

$$f_{St} \ : \ p = g(q) - s$$

Keseimbangan pasar setelah dapat subsidi akan terjadi apabila

$$p_{Dt} = p_{St - s}$$

Contoh

f_D : $q = 5 - ½ p$ sehingga $p = 10 - 2q$

f_S : $q = p - 3$ sehingga $p = 3 + q$

Untuk subsidi yang diberikan sebesar s = ¾ setiap unit

Maka keseimbangan pasar E_S (p_S , q_S) adalah

$$p_{Ds} = p_{Ss} - s$$

$$10 - 2q = 3 + q - ¾$$

$$-3q = 3 - ¾ - 10$$

$$q = 31/12 \quad \text{maka} \quad p = 58/12$$

Maka keseimbangan pasar setelah dapat subsidi E_S (p_S , q_S) adalah E_S (58/12 , 31/12)

Total subsidi yang dinikmati oleh konsumen (S_K)

$$S_K = \Delta p \, . \, q_S$$

$$= (p_E - p_S) . q_S$$

$$= (16/3 - 58/12) . 31/12 = 124/144$$

Total subsidi yang dinikmati oleh produsen (S_P)

$$S_P = (S - \Delta p) . q_S$$

$$= (¾ - 4/12) . 31/12$$

$$= 5/12 \, . \, 31/12 = 155/144$$

Total Subsidi yg dikeluarkan Pemerintah (S) adala

$$S = S_K + S_P = s \, . \, q_S$$

$= 124/144 + 155/144 = 279/144$

Gambar grafinya

f_D : $q = 5 - ½ p$ sehingga $p = 10 - 2q$

untuk $q = 0$ maka $p = 10 - 2.0 = 10$

untuk $p = 0$ maka $2q = 10$

$q = 5$

f_S : $q = p - 3$ sehingga $p = 3 + q$

untuk $q = 0$ maka $p = 3 + 0$

$p = 3$

untuk $p = 0$ maka $0 = 3 + q$

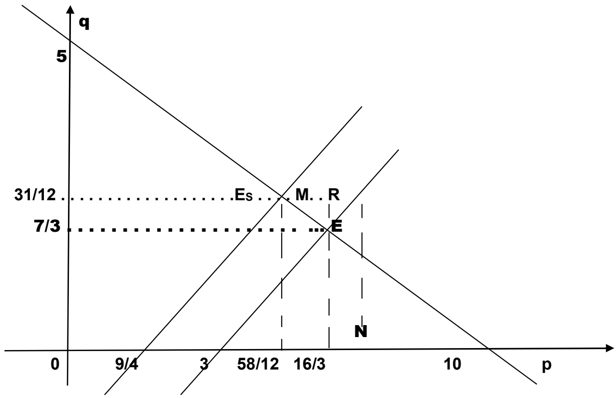
$q = -3$

f_{SS} : $p = 3 + q - 3/4$

$p = q + 9/4$

untuk $q = 0$ maka $p = 9/4$

untuk $p = 0$ maka $q = -9/4$



4.7 KESEIMBANGAN PASAR DUA JENIS BARANG

Keseimbangan pasar (ekuilibrium) adalah keadaan yang menunjukkan baik Konsumen maupun Produsen telah menyetujui harga suatu barang, yaitu harga yang Konsumen bersedia membeli untuk sejumlah barang sama dengan harga yang Produsen bersedia menjual untuk sejumlah barang tersebut.

dua macam produk atau lebih yang berhubungan secara: Di pasar terkadang permintaan suatu barang dipengaruhi oleh permintaan barang lain. Ini bisa terjadi pada

❖ Substitusi (Produk Pengganti) misalnya

1. Beras dengan gandum
2. Minyak tanah dengan Gas elpiji

❖ Komplementer (Produk Pelengkap)

1. Teh dengan gula
2. Semen dengan pasir

Secara sistematis fungsi permintan dan fungsi penawaran produk mempunyai dua variabel bebas, yaitu Harga produk itu sendiri dan Harga lain yang saling berhubungan

Fungsi permintaan dan penawaran barang pertama

f_{d1} : $q_1 = f(p_1, p_2)$

f_{s1} : $q_1 = f(p_1, p_2)$

Fungsi permintaan dan penawaran barang ke dua

f_{d2} : $q_2 = f(p_1, p_2)$

f_{s2} : $q_2 = f(p_1, p_2)$

Keseimbangan pasar akan terjadi jika

1. Kuantitas barang I sama dengan yg ditawarkan

$$q_{d1} = q_{s1}$$

2. Kuantitas barang II sama dengan yg ditawarkan

$$q_{d2} = q_{s2}$$

Contoh

Jenis Barang	Permintaan	Penawaran
Barang Pertama	**$Q_1 = f(p^1, p^2) = 100 - 2p^1 + 3p^2$**	**$Q_1 = f(P^1 - p^2) = 2p^1 - 4$**
Barang Kedua	**$Q_2 = f(p^1, p^2) = 150 + 4p^1 - p^2$**	**$Q2 = f(P^1 - p^2) = 3p^2 - 6$**

Hitunglah harga dan kuantitas masing-masing barang?

Penyelesaian :

f_{d1} : $q_1 = 100 - 2p_1 + 3p_2$

f_{s1} : $q_1 = 2 p_1 - 4$

f_{d2} : $q_2 = 150 + 4 p_1 - p_2$

f_{s2} : $q_2 = 3 p_2 - 6$

Titik keseimbangan pasar

$q_{d1} = q_{s1}$ maka $4 p_1 - 3 p_2 = 104$

$q_{d2} = q_{s2}$ maka $-4p_1 + 4 p_2 = 156$

Sehingga didapat

$p_1 = 221$, $q_1 = 438$ → E_1 (221 , 438)

$p_2 = 260$, $q_2 = 774$ → E_2 (260 , 774)

4.8 PENGARUH PAJAK DAN SUBSIDI TERHADAP KESEIMBANGAN PASAR DUA JENIS BARANG

Diketahui

f_{d1} : $q_1 = 100 - 2\,p_1 + 3\,p_2$ dan f_{s1} : $q_1 = 2\,p_1 - 4$

f_{d2} : $q_2 = 150 + 4\,p_1 - p_2$ dan f_{s2} : $q_2 = 3\,p_2 - 6$

Titik keseimbangan pasar (E)

$$q_{d1} = q_{s1}$$

$$100 - 2\,p_1 + 3\,p_2 = 2\,p_1 - 4$$

$$-\quad 4\,p_1 + 3\,p_2 = -\,104$$

$$4\,p_1 - 3\,p_2 = 104 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (1)$$

$$q_{d2} = q_{s2}$$

$$150 + 4\,p_1 - p_2 = 3\,p_2 - 6$$

$$4\,p_1 - 4\,p_2 = -156 \;.\;.\;.\; (2)$$

Gunakan Rumus Eliminasi

$$\begin{array}{lrcl} (1) & 4\,p_1 - 3\,p_2 & = & 104 \\ (2) & \underline{4\,p_1 - 4\,p_2} & \underline{=} & \underline{-156} \\ - & p_2 & = & 260 \end{array}$$

Subsitusikan ke salah satu persamaan (1) atau (2)

$$(1) \quad 4\,p_1 - 3\,p_2 = 104$$

$$4\,p_1 - 3\,(260) = 104$$

$$4\,p_1 = 104 + 780$$

$$4\ p_1 = 884$$

$$p_1 = 221$$

Subsitusikan ke salah satu fungsi permintaan atau penawaran

$$q_1 = 2\ p_1 - 4$$

$$= 2\ (221) - 4$$

$$= 438 \text{ sehingga } E_1\ (221, 438)$$

$$q_2 = 3\ p_2 - 6$$

$$= 3\ (260) - 6$$

$$= 77 \text{ sehingga } E_2\ (260, 774)$$

Titik keseimbangan pasar setelah kena pajak untuk barang I sebesar 1/2 per unit dan untuk barang II sebesar 1 per unit adalah

f_{d1} : $q_1 = 5 - p_1 + p_2$ dan $f_{s1} : q_1 = p_1 + p_2 - 5$

f_{d2} : $q_2 = 10 - p_2 - p_1$ dan f_{s2} : $q_2 = 2\ p_2 - p_1\ 2$

I : $q_{D1} = p_{S1} + t_1$

II : $q_{D2} = p_{S2} + t_2$

Untuk barang I ($t = ½$) : $5 - p_1 + p_2 = p_1 + p_2 - 5 + ½$

$$-\ 2\ p_1 = -10 + 1/2$$

$$-\ 2\ p_1 = -19/2$$

$$p_1 = 19/4$$

Untuk barang II (t = 1) : $10 - p_2 - p_1 = 2p_2 - p_1 - 2 + 1$

$$-3p_2 = -11$$

$$p_2 = 11/3$$

maka $q_1 = p_1 + p_2 - 5$

$= 19/4 + 11/3 - 5$

$= \dfrac{57 + 44 - 60}{12}$

$= 41/12$ maka E_{t1} (19/4 , 41/12)

Maka $q_2 = 2p_2 - p_1 - 2$

$= 2(11/3) - 19/4 - 2$

$= 22/3 - 19/4 - 2$

$= \dfrac{88 - 57 - 24}{12}$

$= 7/12$ maka E_{t2} (11/3 , 7/12)

Total Pajak Yang Diterima Pemerintah adalah Penjumlahan dari hasil kali pajak per unit masing masing dengan kuantitas masing-masing barang setelah adanya pajak.

$T = t_1 \,.\, q_1(t) + t_2 \,.\, q_2(t)$

$= 1/2 .\ 41/12 + 1 \,.\, 19/12$

$= 41/24 + 19/12$

$= \quad 41/24 \quad + \quad 38/24$

$= \quad 79/24$

Titik keseimbangan pasar setelah dapat subsidi untuk barang I sebesar 2 per unit dan untuk barang II sebesar 1 per unit adalah

f_{d1} : $q_1 = 5 - p_1 + p_2$ dan f_{s1} : $q_1 = p_1 + p_2 - 5$

f_{d2} : $q_2 = 10 - p_2 - p_1$ dan f_{s2} : $q_2 = 2p_2 - p_1 - 2$

I : $q_{D1} = p_{S1} - s_1$

II : $q_{D2} = p_{S2} - s_2$

Untuk barang I (s = 2) : $5 - p_1 + p_2 = p_1 + p_2 - 5 - 2$

$-2p_1 = -12$

$p_1 = 6$

Untuk barang II (s = 1) : $10 - p_2 - p_1 = 2p_2 - p_1 - 2 - 1$

$-3p_2 = -13$

$p_2 = 13/3$

maka $q_1 = p_1 + p_2 - 5$

$= 6 + 13/3 - 5$

$= \dfrac{18 + 13 - 15}{3}$

$= 16/3$ maka E_{S1} (6 , 16/3)

Maka $q_2 = 2p_2 - p_1 - 2$

$$= \quad 2\,(13/3) - 6 - 2$$

$$= \quad \frac{26 - 18 - 6}{3}$$

$= \quad 2/3$ maka E_{S2} (13/3 , 2/3)

4.9 FUNGSI KONSUMSI

Konsumsi adalah bagian pendapatan yang dibelanjakan untukkebutuhan konsumsi. Tabungan adalah bagian pendapatan yang tidak dikomsumsi. Jadi, besarnya pendapatan akan sama dengan besarnya konsumsi ditambah dengan tabungan

Fungsi konsumsi adalah suatu kurva yang menggambarkan sifat hubungan di antara sifat konsumsi rumah tangga dalam perekonomian dan pendapatan nasional (atau pendapatan disposable) perekonomian tersebut. Fungsi tabungan adalah suatu kurva yang menggambarkan sifat hubungan di antara tingkat tabungan rumah tangga dalam perekonomian dan pendapatan nasional (atau pendapatan disposable) perekonomian tersebut. Jadi, baik dalam hukum psikologi konsumsi dari Keynes dikemukakan, Setiap pertambahan pendapatan akan menyebabkan pertambahan konsumsi dan pertambahan tabungan (saving). Apabila fungsi konsumsi dan fungsi tabungan ditulis dalam notasi fungsi, bentuk umumnya seperti berikut.

Dalam jangka pendek fungsi konsumsi dapat diangga linier. Besar kecilnya konsumsi nasional suatu negara tergantung dari pendapatan nasionalnya. Hubungan konsumsi dan pendapatan nasional yang linier ini dapat dinyatakan

$$\mathbf{C = f\,(y)}$$

$$\mathbf{C = a + by}$$

dan menurut Keynes pendapatan nasional terdiri dari konsumsi dan tabungan nasional yang dinyatakan

$$\mathbf{Y = C + S}$$

Keterangan

C = Konsumsi Nasional

Y = Pendapatan Nasional

S = Tabungan Nasional

a =Autonomous Consumtion besarnya konsum nas)

$b = (\Delta C/\Delta Y)$ = Slope kurva konsumen

Pendapatan Disposabel

Pendapatan nasional pada dasarnya merupakan total dari pendapatan semua sektor didalam suatu negara yaitu sektor rumah tangga, sektor badan usaha dan sektor pemerintah. Pendapatan Disposabel adalah pendapatan nasional yang secara nyata dapat dibelanjakan oleh masyarakat.

Hubungan antara pendapatan nasional dan pendapatan disposabel suatu negara adalah

$$\mathbf{Y_d = Y - T + R}$$

Keterangan

Y_d = Pendapatan disposabel
Y = Pendapatan Nasional
T = Pajak
R = Transfer payment (pembayaran alihan)

Jadi pendapatan disposibel adalah pendapatan nasional setelah dikurangi pajak dan ditambah transfer payment. Dengan demikian secara nyata konsumsi (C) merupakan fungsi dari pendapatan disposabel (Y) yang dinyatakan

$$\mathbf{C = f(Y_d)}$$

$$\mathbf{= a + bY_d}$$

Contoh

Konsumsi masyarakat sebuah negara dinyatakan sbb

$$\mathbf{C = 40 + 0{,}4\,Y}$$

a. Berapa besar konsumsi masyarakat negara tersebut jika pendapatan nasionalnya 200
b. Tentukanlah funsi tabungannya

Penyelesaian

a. Bila Y = 200, maka C = ?

$$C = 40 + 0{,}4\,Y$$
$$= 40 + 0{,}4\,(200)$$
$$= 40 + 80$$
$$= 120$$

Jadi besar konsumsinya untuk pendapatan nasionalnya 200 adalah 120

b. $Y = S + C$

$S = Y - C$

$$= Y - (40 + 0{,}4\ Y)$$

$$= 0{,}6\ Y - 40$$

$$= - 40 + 0{,}6\ Y$$

Jadi fungsi tabungannya adalah $S = - 40 + 0{,}6\ Y$

4.10 ANALISIS PULANG POKOK (Break Even Analysis)

Pulang pokok (Break Even) adalah suatu keadaan operasi perusahaan dimana perusahaan tidak memperoleh laba dan juga tidak mengalami kerugian (impas)

Tujuan perusahaan secara keuangan adalah untuk memperoleh keuntungan. Besar kecilnya keuntungan yang dihasilkan umumnya merupakan indicator dan ukuran kesuksesan manajemen perusahaan dalam menjalankan kegiatan usahanya. Oleh sebab itu manajemen harus mampu merencanakan keuntungan bagi perusahaan.

- **Fungsi Penerimaan Total**

Penerimaan Total (total revenue = total penjualan) bagi suatu perusahaan adalah fungsi dari kuantitas barang yg dijual (diprosuksi).Besarnya merupakan hasil kali antara kuantitas barang dengan harga barang perunitnya. Dapat dinyatan sbb

$$\mathbf{R = f(y)}$$

$$\mathbf{= p\,q}$$

Keterangan

R = total revenue (total penerimaan, total penjualan)

q = quantitas barang

p = harga perunit barang

Average Revenue (Penerimaan Rata-rata) → AR

AR adalah penerimaan total dibagi kuantitas barang yang diproduksi (dijual)

$$AR = R/q = q.p/q = p$$

Jadi Average Revenue (AR) = harga perunit barang yang di produksi (dijual).

❖ **Fungsi Biaya**

Biaya total yg dikeluarkan untuk memproduksi suatu barang akan semakin besar bila kuantitas produksinya semakin banyak ini berarti biaya total adalah fungsi dari barang yang diproduksi. Besarnya biaya total ini merupakan hasil kali antara banyaknya barang dengan biaya rata-rata perunit.

$$C = f(g)$$
$$= q\ c$$

Keterangan

C = biaya total

q = kuantitas barang

c = biaya rata-rata per unit barang

Biaya total terdiri dari dua

- Biaya tetap (fixed cost)

  adalah biaya yang yg senantiasa tetap besarnya,tidak tergantung dari banyak sedikitnya barang yg diproduksi seperti gaji staf, sewa, bunga uang, penyusutan.

- Biaya variabel (variable cost) → VC

adalah biaya yang besarnya dapat berubah-ubah tergantung dari banyak sedikitnya barang yang diproduksi seperti upah tenaga kerja, bahan baku, biaya advertensi. biaya variabel ini merupakan fungsi dari banyaknya barang yg diproduksi sbb

$$VC = f(q) = v.q$$

Keterangan

v = biaya variabel per unit barang

q = kuantitas barang yang diproduksi

Dikaitkan dengan biaya tetap dan biaya variabel maka biaya total adalah

$$C = FC + VC = FC + f(q)$$

Maka Average Cost (biaya rata-rata atau biaya per unit barang) → AC

$$AC = C / q = c$$

❖ Keuntungan, Kerugian dan Pulang Pokok

Bila Total revenue (total penjualan) lebih besar dari total biaya, maka perusahaan mendapat keuntungan. Bila total revenue lebih kecil dari total biaya maka perusahaan mengalami kerugian (keuntungan negative), dan apabila total revenue sama dengan total biaya maka perusahaan tersebut berada dalam keadaan pulang pokok. Secara grafis titik potong antara garis total revenue (R) dan biaya total (C) menunjukkan titik pulang pokok (Break Even Point)

Persamaan yang menyatakan hubungan antara laba, total revenue dan total biaya adalah

$$\pi = R \,.\, C$$

Keterangan

R: Total revenue/ total penjualan / penerimaan Total

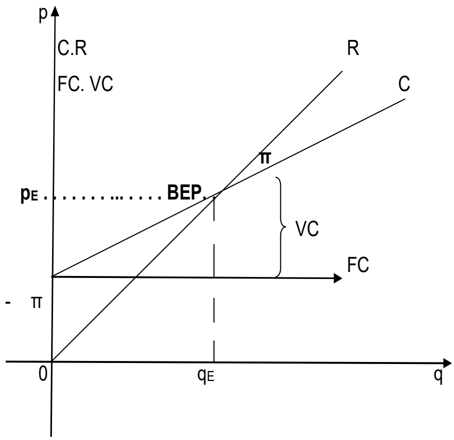
π: Laba

Bila π positif = laba

Bila π negative = rugi

Bila π nol = pulang pokok

Gambar Grafik Pulang Pokok adalah sebagai berikut :



Titik Pulang Pokok

Titik pulang pokok terjadi bila penerimaan total (R) yang diterima perusahaan sama dengan biaya total (C) yang dikeluarkan oleh perusahaan tersebut , yang dapat dinyatakan sebagai berikut

$$R = C$$

$$R = FC + VC$$

$$p.q - vq = PC$$

$$q(p - v) = FC$$

$$q_E = \frac{F\ C}{(p - q)}$$

Keterangan

VC = total variable cost / total biaya variable

v = biaya variable per unit barang

p = harga jual per unit barang

FC = total biaya tetap

R = penerimaan total/total penjualan

(p – v) = propit margin atau kontribusi

Contoh

Sejenis barang diproduksi dengan biaya tetap Rp.5.000 biaya variabel perunit (v) Rp.20 dan harga jual barang tersebut (p) Rp.30 perunit

a. Tentukan kuantitas impas (kuantitas pulag pokok)

b. Agar diperoleh laba sebesar Rp.2.500 berapa unit sebaiknya berproduksi ?

Penyelesaian

a. FC = 5.000 R = q.p

VC = q.v = q. 30

= q. 20 = 30 q

= 20 q

Keadaan Pulang Pokok tercapai bila

$C = R$ atau $q_E = FC/(p - v)$

$= 5.000/(30 - 20)$

$FC + VC = 30\,q$

$5.000 + 20\,q = 30\,q$ $q_E = 500$

$q = 500$

b. Laba (π) = 2500 , q = ?

$\pi = R\,.\,C$

$2.500 = 30\,q - (5.000 + 20\,q)$

$7.500 = 10\,q$

$q = 750$

Jadi agar diperoleh laba sebesar Rp.2.500 sebaiknya berproduksi sebanyak 750 unit

Contoh

1. Pada saat harga buku Rp 10000 per lusin permintaan akan buku tersebut sebanyak 10 lusin, dan ketika harga buku turun menjadi Rp 8000 per lusin

permintaannya menjadi 16 lusin. Tentukanlah funfsi permintaannya

Penyelesaiannya

Dik : p_1 = Rp 10000

p_2 = Rp 8000

q_1 = 10

q_2 = 16

Dit : q_D = ...?

$$\frac{p - p_1}{p_2 - p_1} = \frac{q - q_1}{q_2 - q_1}$$

$$\frac{p - 10.000}{8000 - 10.000} = \frac{q - 10}{16 - 10}$$

$$6 (p - 10.000) = 2000 (q - 10)$$

$$6p - 60.000 = 2000q - 20.000$$

$$- 2000 q = 20.000 + 60.000 - 6p$$

$$q = \frac{80.000 - 6 p}{-2000}$$

$$q = - 40 + 0,003 p$$

$$q = 0,003 p - 40$$

2. Dalam suatu pasar diketahui fungsi permintaannya $q_D = 40 - 2p$. Berapakah jumlah permintaan ketika harga (p) = 10 ?

Penyelesaiannya

Dik : $qd = 40 - 2P$

$p = 10$

Dit : q_D =....?

$q_D = 40 - 2p$

$q_D = 40 - 2(10)$

$q_D = 40 - 20$

$q_D = 20$

Jadi, ketika harga (p) nya 20, maka jumlah permintaannya adalah 20.

3. Pada saat harga Rp 40 per unit, jumlah penawarannya 10 unit. Dan ketika harga Rp 60 per unit, jumlah penawarannya 20 unit. Tentukan fungsi penawarannya

Penyelesaiannya

Dik : $p_1 = 40$

$p_2 = 60$

$q_1 = 10$

$q_2 = 20$

Dit : $q_S = ...?$

$$\frac{p - p_1}{p_2 - p_1} = \frac{q - q_1}{q_2 - q_1}$$

$$\frac{p - 40}{60 - 40} = \frac{q - 10}{20 - 10}$$

$$10 (p - 40) = 20 (q - 10)$$

$$10 p - 400 = 20 q - 200$$

$$-20 q = 200 - 10 p$$

$$q = 0,5 p - 10$$

Jadi, fungsi penawarannya adalah $q_S = 0.5 p - 10$

4. Tentukan jumlah barang dan harga pada keseimbangan pasar untuk fungsi permintaan q = 10 - 0,6 p dan fungsi penawaran q = -20 + 0,4 Pp

Penyelesainnya

Titik keseimbangan pasar akan terjadi $q_D = q_S$

$$10 - 0.6 p = -20 + 0.4 p$$

$$-p = -30$$

$$p = 30$$

untuk p = 30 maka $q = 10 - 0,6 p$

$$= 10 - 0,6 (30)$$

$= \quad 10 - \quad 18$

$= \quad - 8$

Jadi Titik keseimbangan pasar E (30 , - 8)

Jadi keseimbangan pasar terjadi pada saat harga (p) = 30 dan jumlah barang (q) = - 8

4.11 Soal – Soal Latihan

1. Jika fungsi permintaan $q = - \frac{1}{2} p + 10$ dan
   fungsi penawaran $q = 2p - 2$

Tentukanlah

a. Titik keseimbangan pasar (ekuilibrium) dan gambar grafiknya

b. Titik keseimbangan pasar setelah kena pajak sebesar 2

c. Ekuilibrium setelah dapat subsidi dari pemerintah sebesar 1

d. Total pajak yang diterima pemerintah

e. Total pajak yang harus ditanggung konsumen

f. Total pajak yg haus ditanggung produsen

2. Konsumsi masyarakat sebuah negara dinyatakan sbb

$$C = 100 + 0{,}2\,Y$$

Tentukanlah

a. Besar konsumsi masyarakat negara tersebut jika pendapatan nasionalnya 500
b. Tentukanlah funsi tabungannya

3. Jika Sejenis barang diproduksi dengan biaya tetap Rp.10.000 biaya variabel perunit (v) Rp.50 dan harga jual barang tersebut (p) Rp.100 perunit

a. Tentukan kuantitas impas (kuantitas pulag pokok)

b. Agar diperoleh laba sebesar Rp.5.000 berapa unit sebaiknya diproduksi ?

4. Fungsi konsumsi masyarakat suatu negara adalah $C = 40 + 0{,}8\,Y$ jika Pemerintah menerima pembayaran pajak sebesar 12 dari masyarakat, tapi juga memberikan pembayaran alihan sebesar 4 kepada warga masyarakatnya. Berapa besar konsumen dari masyarakat tersebut pada waktu pendapatan nasionalnya sebesar 300

5. Konsumsi masyarakat sebuah negara adalah $C = 60 + 0{,}4\,Y$

Tentukanlah

a. Fungsi tabungannya
b. Konsumsi masyarakat bila pendapatan nasionalnya 400
c. Tabungan masyarakatnya bila pendapatan nasionalnya 400
d. Gambar grafik fungsi konsumsi dan tabungannya dalam satu gambar

6. Sebuah perusahaan menjual barangnya dengan harga Rp. 1500 per unit. Biaya bahan-bahan Rp. 400 per unit . Biaya tenaga kerja Rp. 550 per unit. Biaya pengepakkan Rp. 150 per unit. Biaya tetapnya Rp 2000

Tentukanlah

a. Fungsi total revenue (R) = f (q)
b. Fungsi total biaya variable VC = f (q)
c. Fungsi biaya total C = f (q)
d. Fungsi laba / profit π = f (q)
e. Kuantitas yang dijual agar diperoleh laba sebesar Rp. 6000
f. Kuantitas pulang pokok

7.Diketahui fungsi permintaan $q = -2p + 10$ dan fungsi penawaran Adalah $q = 2p - 8$. Pemerintah mengenakan pajak sebesar 2 dan member subsidi 1. Gambar grafiknya dalam satu gambar titik keseimbangan pasar sebelum dikenakan pajak dan dapat subsidi serta setelah kena pajak dan dapat subsidi.

BAB 5 FUNGSI TAN – LINIER

PEMBAHASAN MATERI

Pada abad 4 telah dipelajari mengenai aplikasi fungsi linear dalam ekonomi dan bisnis. Kadang kala untuk menggambarkan hubungan antara dua variabel ekonomi tidak cukup dan kurang tepat kalau didekati dengan fungsi linear. Dalam keadaan demikian itu maka pendekatan atau penggambaran hubungan antara dua variabel ekonomi tersebut akan lebih baik digunakan fungsi tan-linear

Dalam bab ini akan dibahas mengenai fungsi tan-linier / non linier yang banyak diterapkan pada analisis ekonomi seperti fungsi kuadrat, fungsi pecah, fungsi eksponem dan logaritma

TUJUAN INSTRUKSIONAL KHUSUS

Setelah selesai mempelajari bab ini, Mahasiswa diharapkan mampu

1. Memahami dan menjelaskan mengenai fungsi kuadrat
2. Memahami dan menjelaskan fungsi pecah

3. Memahami dan menjelaskan fungsi eksponem
4. Memahami dan menjelaskan fungsi logaritma

5.1 PENDAHULUAN

Pada dasarnya Fungsi Kuadrat mempunyai dua unsur kata yaitu “Fungsi” dan “Kuadrat”. Konsep mengenai fungsi terdapat hampir disetiap cabang ilmu Matematika, sehingga fungsi dianggap sebagai hal yang penting dan banyak kegunaannya. Fungsi dalam Matematika berhubungan dengan relasi dan himpunan, maka biasanya sebelum mempelajari fungsi terlebih dahulu diperkenalkan mengenai relasi. Fungsi sendiri adalah pemetaan setiap anggota dalam sebuah himpunan atau domain kepada anggota himpunan lain yang disebut kodomain, pengertian lain mengenai fungsi adalah suatu relasi atau hubungan yang menghubungkan setiap anggota X dalam suatu himpunan yang disebut domain dengan suatu nilai tunggal dari himpunan ke dua atau kodomain

5.2 FUNGSI KUADRAT

Fungsi kuadrat merupakan fungsi yang pangkat terbesar variabelnya adalah dua, mirip dengan persamaan kuadrat tapi berbentuk fungsi. Fungsi kuadrat sendiri memiliki bentuk umum yaitu adalah f(x) = ax^2+bx+c dengan a,b,c suatu bilangan real dan a $\neq$ 0. Sebuah fungsi selalu berhubungan dengan grafik begitu pula dengan funsgsi kuadarat. Grafik fungsi kuadrat berbentuk parabola untuk menggambar suatu fungsi kuadrat harus menemukan titik potong dengan sumbu koordinat dan titik ekstrimnya atau sebutan lain dari titik ekstrim yaitu adalah titik puncak atau titik maksimum / titik minimum.

Fungsi kuadrat : suatu fungsi f pada daerah asal yang ditentukan oleh

$F(x) = ax^2 + bx + c$, (Parabola Tegak) atau $f(y) = Ay^2 + By + C$,

(Para Bola Datar) dengan a , b , c Ɛ R dan A , B , C Ɛ R serta a $\neq$ 0 A $\neq$ 0

- **Sifat – Sifat Parabola Tegak**

1. Untuk a > 0 maka parabola terbuka keatas

Titik ekstrimnya titik minimum dan $a < 0$ para bola terbuka kebawah. Titik ekstrimnya adalah titik maksimum.

2. Sumbu simetrisnya garis $x = -b/2a$
3. Titik puncaknya P ($x = -b/2a$, $y = -D/4a$)

$$D = b^2 - 4ac$$

4. Titik potong kurva dengan sumbu y diperoleh jika $x = 0$ sehingga $y = c$ maka titik potongnya (0 , c)
5. Titim potong kurva dengan sumbu x diperoleh jika $y = 0$ sehingga

$$ax^2 + bx + c = 0$$

6. Jika $c > 0$ maka para bola memotong sb y (+) jika $c <$ maka para bola memotong sb y (-)

❖ **Sifat – sifat Parabola Datar**

1. Bila $A > 0$, maka parabola terbuka ke kanan bila $A<0$, maka parabola terbuka ke kiri

2. Sumbu simetris adalah garis $y = - B/2A$

3. Titik puncaknya P (x = - D/4A , y = - B/2A)

4. Titik potong kurva dengan sb x diperoleh y = 0

5. Titik potong dengan sb y diperoleh jika x = 0

6. Bila c > 0 kurva memotong sb x (+)
Bila c < 0 kurva memotong sb x (-)
Bila c = 0 kurva melalui titik (0 , 0)

Contoh Soal

1. Tentukanlah
a. Terbuka kemanakah parabolannya

b. Sumbu simetrisnya

c. Titik Ekstrimnya

d. Titik potongnya jika memotong di sumbu x

e. Titik potongnya jika memotong di sumbu y

f. Gambar garafiknya

Pada masing-masing para bola berikut

1) $F(x) = -x^2 + 4x - 3$

2) $F(y) = -2y^2 - 4y + 30$

Penyelesainnya

1) $F(x) = -x^2 + 4x - 3$

$a = -1$, $b = 4$ dan $c = -3$

a. Karena $a = -1 < 0$ maka parabola terbuka ke bawah

b. Sumbu simetrisnya $x = -b/2a = -4/2(-1) = 2$

c. puncak/ekstrim

$x = -b/2a = 2$

$$y = -D/4a = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} = -\frac{(16-1)}{-4} = 1$$

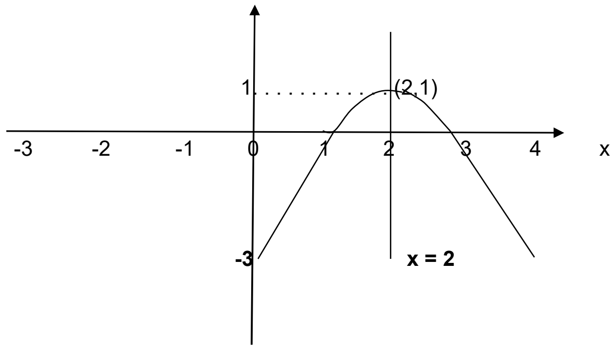
d. Titik potong dgn sb x maka $y = 0$

$y = -x^2 + 4x - 3$	$D = b^2 - 4ac$
$0 = x^2 - 4x + 3$	$= (-4)^2 - 4(-1)(-3)$
$(x-1)(x-3) = 0$	$= 16 - 12$
$x = 1$, $x = 3$	$= 4$

e.Titik potong terhadap sb y maka $x = 0$

$y = f(x) = -0 + 4.0 - 3 = -3$

Grafiknya



jadi titik potong dengan sumbu y adalah (0 , -3 , 2)

$x = -2y^2 - 4y + 30$

A = - 2 , B = - 4 dan C = 30

a. Karena a < 0 maka kurva terbuka ke kiri

b. Sumbu simetrisnya y = -B/2A = -(-4)/2(-2) = - 1

c. Titik ekstrim P (x= -D/4A , y= -B/2A) = P (32 , -1)

d. Titik potong terhadap sumbu x maka y = 0

$$
\begin{aligned}
x &= -2y^2 - 4y + 30 \\
&= 2(0) - 4(0) + 30 \\
&= 30
\end{aligned}
$$

maka titik potong (30 , 0)

e. Titik potong terhadap sumbu y maka x = 0

$x = -2y - 4y + 30$ $\quad D = b^2 - 4ac$

$0 = 2y + 4y - 30$ $\quad = (-2) - 4(-2)(30)$

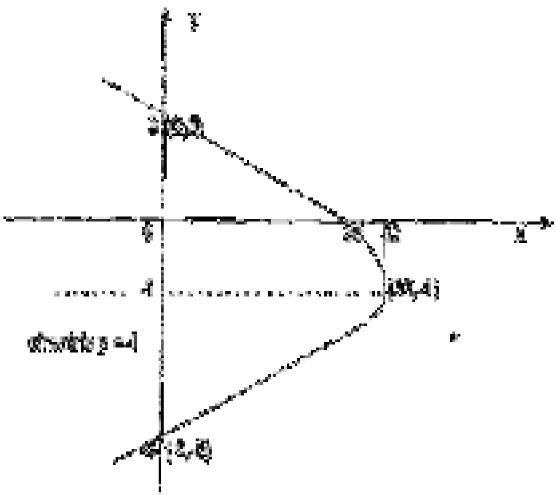
$0 = y + 2y - 15$ $\quad = 242$

$(y + 5)(y - 3) = 0$ $\quad D > 0$

$y_1 = -5$, $y_2 = 3$ (Ada dua titik potong)

(0 , -5) dan (0 , 3)

f. Grafiknya



5.3 FUNGSI PECAH

Fungsi pecah adalah suatu fungsi yang variable bebasnya terdapat dalam penyebut. Persamaan dari suatu fungsi pecah ini disebut persamaan hyperbola dan grafik fungsinya berbentuk hyperbula. Fungsi pecah yang paling sederhana adalah fungsi pecah linier dengan bentuk umum

$Y = \frac{ax + b}{cx + d}$ . . . . fungsi pecah linier

(a , b , c , d ε R dan c ≠ 0)

$y = \frac{ax^2 + bx + c}{px + qx + r}$ . . . . . .fungsi pecah kuadrat

(a , b , c , p , q , r ϵ R dan p ≠ 0)

Sifat- Sifat Fungsi Pecah Linier

1) Titik potong fungsi dengan sumbu x jika y = 0 sehingga ax + b = 0 maka x = - b / a

   Jadi titik potong fungsi dengan sumbu x adalah

   (- b/a , 0)

2) Titik potong fungsi dengan sumbu y jika x = 0 maka $y = \frac{a. 0 + b}{c. 0 + d}$

   maka y = b/d

   jadi titik potong dengan sumbu y adalah (0, b/d)

3) Asimtot

asimtot sebuah garis lengkung adalah sebuahgaris lurus yang makin lama makin dekat pada garis lengkung itu sehingga berjarak sekecil-kecilnya, tetapi jaraknya tidak nol.

❖ **Asimtot datar**

Asimtot datar adalah sebuah garis yang sejajar atau berimpit dengan sumbu x dan akan terpotong oleh garis lengkung (kurva fungsi pecah) pada x tak berhingga

Asimtot datar didapat , jika x → ∞

$$\mathbf{Y = \frac{a\,x + b}{c\,d + d} = \frac{a + b/x}{c + d/x} = \frac{a + b/\infty}{c + d/\infty} = \frac{a + 0}{c + 0} = \frac{a}{c}}$$

$= a / c$ . . . . (persamaan asimtot datar)

❖ **Asimtot tegak**

Asimtot tegak adalah sebuah garis yang sejajar atau berimpit dengan sumbu y dan akan terpotong oleh garis lengkung (kurva fungsi pecah) pada y tak berhingga.

Asimtot Tegak didapat jika y → ∞

$$\infty = \frac{a\,x + b}{c\,x + d}$$

suatu pecahan menjadi tak hingga (∞) apabila penyebutnya nol

Jadi $cx + d = 0$

$$cx = -d$$

$$x = -d/c \quad \ldots \text{ (persamaan persamaan tegak)}$$

Contoh Soal

1. Diketahui sebuah fungsi $y = \dfrac{3x + 25}{x+5}$

Pertanyaan

a. Tentukanlah titik potong fungsi dengan sumbu x
b. Tentukan titik potong fungsi dengan sumbu y
c. Tentukanlah asimtot-asimtotnya
d. Gambar grafiknya

Penyelesaiannya

$$Y = \frac{3x + 25}{x + 5} \longrightarrow y = \frac{ax + b}{cx + d}$$

$a = 3 \quad b = 25 \quad c = 1 \quad d = 5$

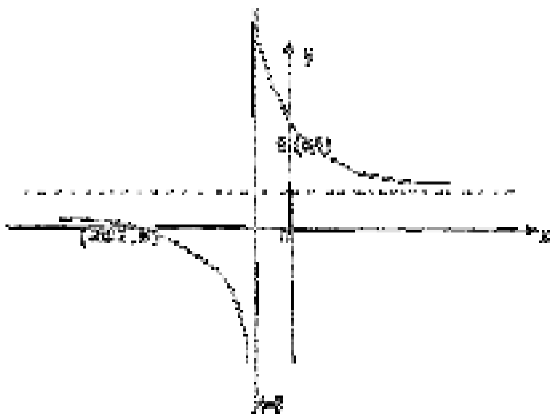
a. Titik potong fungsi dengan sumbu x ($-b/a$, 0) adalah ($-25/3$, 0)

b. Titik potong dengan sumbu y (0 , b/d) adalah (0 , 5)

c. Asimtot datarnya y = a/c adalah 3 Asimtot tegaknya x = -d/c adalah - 5

d. Gambar grafiknya

Asimtut tegak



2. Gambarlah grafik dari $xy - 6x + 2 = 0$

Penyelesaiannya

$xy - 6x + 2 + 0$

$xy = 6x - 2$

$y = \frac{6x - 2}{x} \longrightarrow y = \frac{ax + b}{cx + d}$

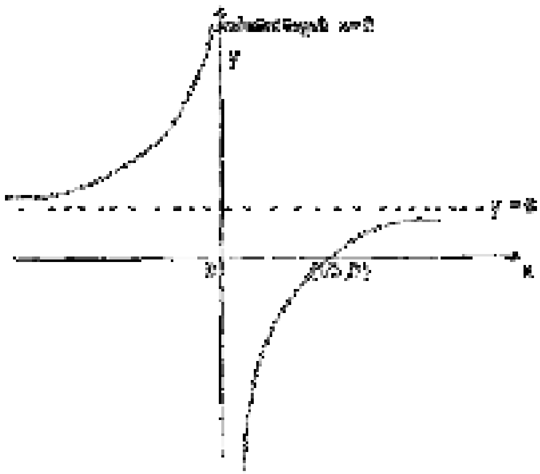
a = 6 b = - 2 c = 1 d = 0

Titik potong dengan sumbu x (-b/a , 0)adalah(1/3 , 0)
Titik potong dengan sumbu y (0 , b/d) adalah (0 , ∞)

Asimtut datar y = a/c adalah 6

Asimtut tegak x = - d/c adalah 0

Gambar grafiknya



5.4 HIPERBOLA FERMAT

Adalah hiperbola sebangun digeneralisasikan. Bentuk umum dari hiperbola Fermat adalah

$$Y x^n = c \quad \text{atau} \quad x y^m = c$$

Sifat-Sifat hyperbola Fermat

1. Titik pusat pada titik (0 , 0)

2. Asimtut-asimtutnya berimpit dengan sumbu x dan y. Asimtut tegak berimpit dengan sumbu tegak y dan asimtut datar berimpit dengan sumbu datar x
3. Bila n dan m merupakan bilangan ganjil dan $c > 0$, maka hiperbola terletak pada kuadran Idan kuadran ke III. Simetris terhadap titik pusat (0,0)
4. Bila n dan m bilangan ganjil dan $c < 0$, maka hiperbola tersebut terletak di kuadran II dan kuadran ke IV. Simetris terhadap titik pusat (0 , 0)
5. Bila n bilangan genap dan $c > 0$ maka hiperbola tegak $y\ x^n = c$ terletak pada kuadran I dan k e II serta simetris terhadap sumbu y dan bila $c < 0$ hiperbola terletak pada kuadran III dan IV
6. Bila m genap dan $c > 0$ maka hiperbola $x\ y^m = c$ terletak pada kuadran I dan IV, serta simetris terhadap sumbu x, dan bila $c < 0$ hiperbola hiperbola terletak pada kuadran ke II dan III

Contoh soal

1. Gambarlah grafik fungsi $y = \frac{36}{X^2}$

Penyelesaiannya

$Y = \frac{36}{X^2}$ $y\,x^2 = 36$ $y\,x^n = c$

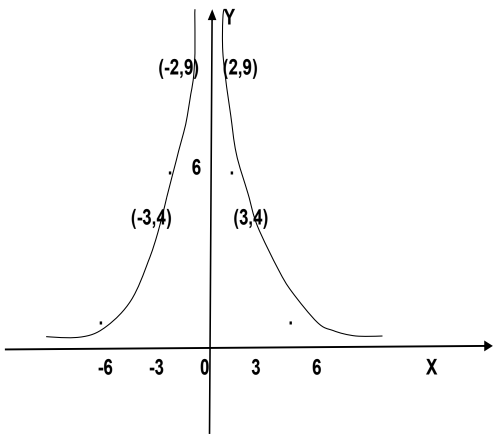
n = 2 ……… bilangan genap

c = 36 ……. c > 0 maka hiperbola terletak di kuadran I dan ke III dari

asimtutnya dan simetris terhadap sumbu y . Titik pusat (0 , 0). Asimtut-asimtutnya berimpit dengan x dan y

Gambar grafiknya :

x	1	2	3	6	-1	-2	-3	-6
y	36	9	4	1	36	9	4	1



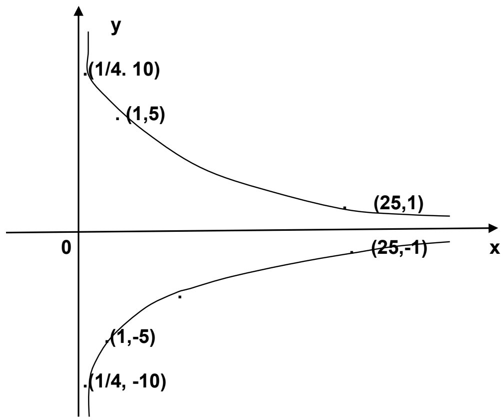
2. Gambarlah grafik dari $x y^2 = 25$

Penyelesaiannya

Bentuk $x y^2 = 25$ ……. $x y^m = c$

m = 2 bilangan genap, c = 25 besar dari 0 maka hiperbola terletak di kuadran I dan IV dari asimtutnya, simetris terhadap sumbu x. Titik pusat (0,0) , asimtut-asimtut berimpit dengan sumbu x dan y

Gambar grafiknya



5.5 FUNGSI EKSPONEM DAN FUNGSI LOGARITMA

Fungsi Eksponem

Adalah suatu fungsi f pada domain R (bilangan riil) yang ditentukan oleh $t(x) = a^x$ dengan $a > 0$ dan a

≠ 1. Sebagai bilangan pokok kadang kala juga dipakai bilangan Euler (e = 2,7182…).Dengan kata lain, fungsi eksponem secara umum dapat dinyatakan

$$y = f(x) = a^x \text{ dimana } a > 0 \quad , \; a \neq 1$$

Keterangan

y = variabel terikat

x = variabel bebas

a = bilangan pokok

Sifat-Sifat Eksponen

Jika a dan b bilangan riil (a ≠ 0 , b ≠ 0) serta m dan n bilangan rasional Maka berlaku

1. $a^0 = 1$	5. $(a^m)^n = a^{mn}$
2. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	6. $a^{-n} = 1/a^n$
3. $a^m / a^n = a^{m-n}$	7. $a^{1/n} = {}^n\sqrt{a}$
4. $(a/b)^m = a^m / b^m$	8. $a^{m/n} = {}^n\sqrt{a^m}$

Contoh

a. $5^0 = 1$	h. $[7^2]^4 = 7^{2x4} = 7^8$
b. $15^0 = 1$	i. $5^{-2} = 1/5^2$

c. $2^3 \cdot 2^4 = 2^{3+4} = 2^7$

d. $5^2 \cdot 5^3 = 5^{2+3} = 5^5$

e. $2^5 / 2^3 = 2^{5-3} = 2^2$

f. $[5/3]^4 = 5^4 / 3^4$

g. $[5^3]^2 = 5^{3x2} = 5^6$

j. $5^{1/2} = {}^2\sqrt{5}$

k. $2^{1/3} = .{}^3\sqrt{2}$

l. $(10^{-3})^5 = 1/10^{15}$

m. $\sqrt{5} \times \sqrt{15} = 5\sqrt{3}$

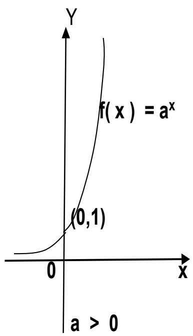
n. $2\sqrt{2} x 2\sqrt{50} = 4\sqrt{100} = 40$

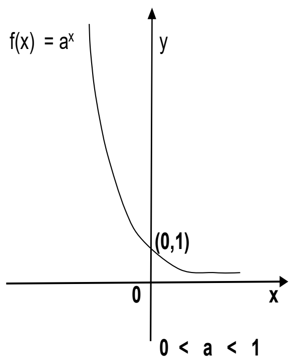
Grafik Fungsi Eksponem

Grafik fungsi $y = a^x$ dapat dibuat bila $x = 0$ dan $y = 1$

Bila $x = 1 \longrightarrow y = a$ dan jika $x \longrightarrow \infty$ maka $y = 0$

Secara umum bentuk grafik $f(x) = a^x$ untuk $a > 0$ dan $0 < a < 1$ bertutrut- turut sebagai berikut





Contoh

1. Buatlah grafik dari

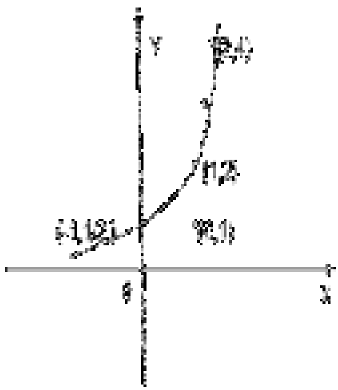
a. $Y = f(x) = 2^x$

b. $Y = f(x) = (½)^x$

c. $Y = f(x) = 2^{3x} + 3$

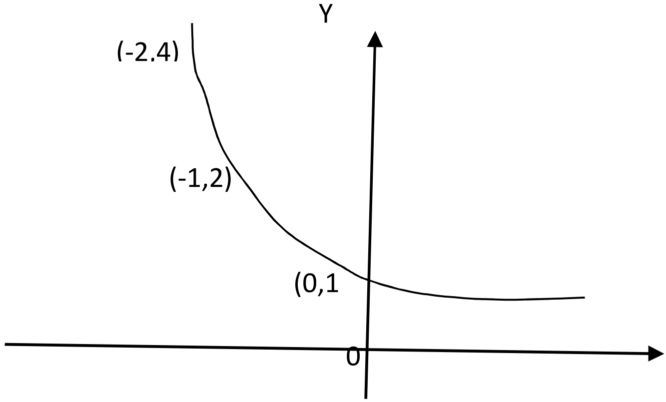
Penyelesaiannya

a. $y = 2^x$



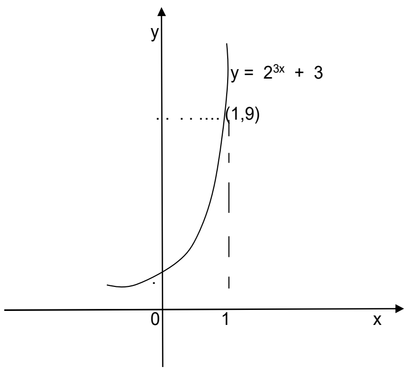
b. $y = (½)^x$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	8	4	2	1	½	¼	1/8



c. $y = 2^{3x} + 3$

x	….	-2	-1	0	1	2	….
y	….	193/64	25/8	4	11	67	….



5.6 Fungsi Logaritma

Fungsi logaritma adalah fungsi invers dari fungsi eksponem . Jika $y = a^x$ ($a > 0$ dan $a \neq 1$) adalah fungsi eksponem dengan bilangan pokok a maka fungsi inversnya $y = {}^a\log x$

Fungsi ini disebut fungsi logaritma dengan bilangan pokok /basis a jadi bentuk fungsi logaritma adalah

$$y = f(x) = {}^a\log x$$

Sifat-Sifat Fungsi Logaritma

a. ${}^a\log a = 1$, ${}^a\log 1 = 0$, ${}^a\log a^n = n$

b. ${}^a\log xy = {}^a\log x + {}^a\log y$

c. ${}^a\log (x/y) = {}^a\log x - {}^a\log y$

d. ${}^a\log x^n = n ({}^a\log x)$

e. $(a)^{{}^a\log x} = x$

f. ${}^a\log x = {}^p\log x / {}^p\log a$

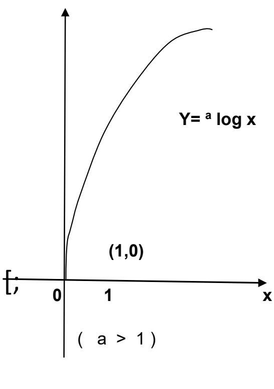
g. $({}^a\log x) ({}^x\log b) = {}^a\log b$

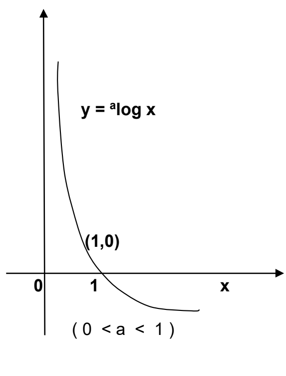
h. $({}^a\log x)({}^x\log a) = 1$

CONTOH

1. $^{10}\log 10 = 1$
2. $^{10}\log 1 = 0$
3. $^{5}\log (2)(15) = {}^{5}\log 2 + {}^{5}\log 15$
4. $^{10}\log (15/7) = {}^{10}\log 15 - {}^{10}\log 7$
5. $^{5}\log 2^{4} = 4\,({}^{5}\log 2)$
6. $^{5}(5)^{\log 4} = 4$, $^{10}(10)^{\log 5} = 5$
7. $({}^{7}\log 8)({}^{8}\log 5) = {}^{7}\log 5$
8. $^{25}\log 625 = {}^{5}\log 625 / {}^{5}\log 25$
9. $^{4}\log 64 = {}^{2}\log 64 / {}^{2}\log 4$
10. $({}^{2}\log 5)({}^{5}\log 2) = 1$
11. $({}^{3}\log 4)({}^{4}\log 3) = 1$

Grafik fungsi logaritma





Contoh Soal

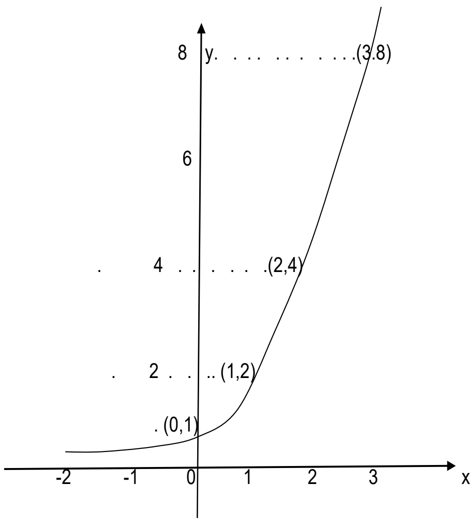
1. Buatlah grafik dari $y = f(x) = 2^x$
2. Buatlah grafik dalam satu gambar untuk ketigafungsi

   $y = {}^3\log x$, $y = x$ dan $x = {}^3\log y$

Penyelesaian :

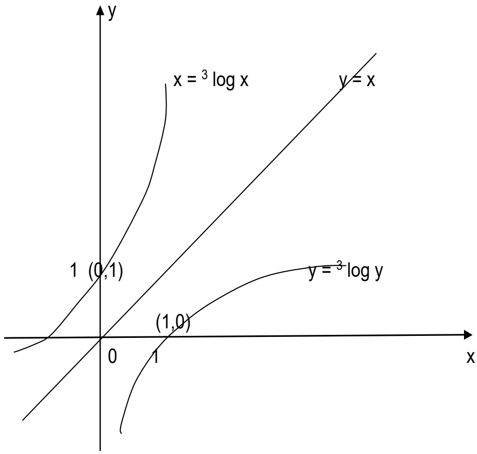
1. Untuk $y = 2^x$

x	-2	1-	0	1	2	3
y	¼	½	1	2	4	8



Gambar grafiknya

2. $y = {}^3\log x$, $y = x$ dan $x = {}^3\log y$



5.7 Soal – Soal Latihan

1. Carilah titik ekstrim (titik puncak), nilai ekstrim dan buat grafikna dari fungsi berikut

a. $y = \frac{1}{2} x^2 + x - 2$

b. $y + x^2 = 4x + 5$

c. $2Y - x^2 = 2x - 1$

d. $X = 3y^2 - 3y - 2$

e. $X = 2y^2 - 2y - 6$

f. $X = 96 - 8y - 2y^2$

2. Tentukanlah persamaan parabola yang mempunyai puncak(- 4,2) dan memotong sumbu y di titik(0,- 2)
3. Buatlah grafik dari fungsi-fungsi berikut
a. $Y = \frac{1}{2} x$
b. $Y = \frac{2x + 3}{x - 2}$
c. $x y^2 = 10$
d. $y = 1/x^2$
e. $x^2 y = 5$
f. $y = \frac{5x - 16}{x - 4}$
4. Tentukanlah titik potong antara garis L dan K dibawah ini
a. L : $y = x - 1$ K : $y = x + 2x - 3$
b. L : $x - 2y + 6$ K : $x - 4y + 4 = 0$
c. L : $y = \frac{18}{x + 3}$ K : $y - 3x + 6 = 0$
5. Sederhanakanlah soal-soal berikut ini
a. $5^3 \times 5^{-2}$ e. ${}^{3}\log (9 \times 27)$

b. $(3/2)^{-5}$ f. ${}^{10}\log 10.000/100$

c. $2^5 / 2^3$ g. ${}^{5}\log 25^2$

d. f. ${}^{5}\log (125/25)$ h. ${}^{1/8}\log 1/8$

6. Rumuskan soal berikut dalam bentuk eksponem
a. ${}^{5}\log 125 = 3$
b. ${}^{1/3}\log 1/9$

BAB 6 LIMIT FUNGSI

Pernahkah anda mendengar prinsip ekononomi yang kurang lebih berbunyi, “Menggunakan modal/pengorbanan/biaya produksi yang sekecil-kecilnya (minimum) untuk memperoleh keuntungan yang sebesar-besarnya (maksimum)?” Prinsip tersebut sering digunakan oleh berbagai perusahaan yaitu dengan menekan biaya produksi menjadi sekecil mungkin (minimum) agar memperoleh keuntungan maksimum Penentuan biaya produksi minimum dan keuntungan maksimum tersebut dalam matematika merupakan salah satu contoh masalahlaju perubahan sesaat nilai !ungs.i "Biaya produksi minimum dan keuntungan maksimum akandicapai pada saat laju perubahan biaya produksi sama dengan nol. Masalah sehari-hari yang berkaitan dengan laju perubahan sesaat nilai fungsi dapat diselesaikan dengan menggunakan konsep limit.

Limit juga dapat digunakan untuk mencari garis singgung suatu kurva di suatu titik tertentu. Selain itu, konsep limit dapat digunakan untuk menghitung pendekatan nilai di suatu titik atau masalah-masalah yang tidak mungkin mencapai nilai ideal, tetapi hanya mendekati saja, misalnya kuota internet yang bertuliskan & gigabyte. Pada kenyataannya, kuota itu tidak tepat &gigabyte melainkan hanya mendekati & gigabyte

"Bagaimana penerapan limit lebih lanjut? Mari mengenal penerapan limit dalam kehidupan sehari-hari melalui topik ini. Pemahaman tentang konsep limit !ungsi di suatu titik dan kekontinuan fungsi merupakan dasar untuk memahami konsep aplikasi limit dalam kehidupan sehari-hari. untuk itu, anda harus sudah menguasai kedua topik tersebut

PEMBAHASAN MATERI

Limit merupakan konsep yang sangat mendasar bagi Kalkulus sehingga beberapa buku (contoh: “Calculus” oleh Varberg-Purcell-Rigdon) mendefinisikan Kalkulus sebagai “Ilmu tentang Limit”. Limit menjadi dasar fundamental bagi cabang Kalkulus lain seperti masalah kontinuitas, turunan, integral, dan deret tak hingga.

Pada bab ini akan dibahas tentang konsep limit, pengertian limit, sifat-sifat limit, bentuk-bentuk persoalan limit dan kontinyuitas suatu fungsi.

TUJUAN INSTRUKSIONAL KHUSUS

Setelah selesai mempelajari bab ini, Mahasiswa diharapkan mampu

1. Memahami dan menjelaskan pengertian Limit fungsi
2. Memahami dan menjelaskan sifat-sifat limit
3. Memahami dan menjelaskan konsep limit
4. Memahami dan menjelaskan
5. Memahami dan menjelaskan
6. Memahami dan menjelas
7. Memahami dan men

6.1 PENDAHULUAN

Limit suatu fungsi merupakan salah satu konsep mendasar dalam kalkulus dan analisis, tentang kelakuan suatu fungsi mendekati titik masukan tertentu. Suatu fungsi memetakan keluaran *f(x)* untuk setiap masukan *x*. Fungsi tersebut memiliki limit *L* pada titik masukan *p* bila *f(x)* "dekat" pada L ketika *x* dekat pada *p*. Dengan kata lain, *f(x)* menjadi semakin dekat kepada *L* ketika *x* juga mendekat menuju *p*. Lebih jauh lagi, bila *f* diterapkan pada tiap masukan yang *cukup* dekat pada *p*, hasilnya adalah keluaran yang (secara sembarang) dekat dengan *L*. Bila masukan yang *dekat* pada *p* ternyata dipetakan pada keluaran yang sangat berbeda, fungsi *f* dikatakan tidak memiliki limit.

Konsep limit digunakan dalam berbagai macam bidang dalam kehidupan sehari-hari. Sebagai contoh, produksi maksimum dari mesin suatu pabrik, dapat dikatakan merupakan **limit untuk pencapain hasil**. Pada prakteknya, pencapaian tersebut tidak tepat, tapi **mendekati sedekat dekatnya**.

6.2 PENGERTIAN LIMIT FUNGSI

Untuk pengertian limit fungsi secara formal, lihat di atas. Secara informal, fungsi f memberikan output f(x) untuk setiap input x. Anggap saja suatu fungsi memiliki batasan L pada input a, maka f(x) bergerak mendekati L dan x bergerak mendekati a. Lebih khusus lagi, jika f ditetapkan sebagai input yang cukup dekat dengan a, maka nilai outputnya akan dipaksakan untuk mendekati L.

Bentuk umum notasi limit sebagai berikut

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

- Perhatikan fungsi yang ditentukan oleh rumus :

$$\underset{x \to 0}{f(x)} = \frac{x^2 - x}{2x}$$

- *f(x) tidak terdefinisi pada x = 0,karena di titik ini f(x) bernilai 0/0 (tidak punya arti),tetapi kita masih dapat menanyakan apa yang terjadi padaf(x) bilamana x mendekati 0 atau apakah f(x) mendekati beberapa bilangan tertentu bilamana x mendekati 0 ?*

- $\text{Limit}_{x \to 0} \frac{x^2 - x}{2x} = \text{Limit}_{x \to 0} \frac{x^2}{2x} - \frac{x}{2x} = \frac{x}{2} - \frac{1}{2} = -1/2$

6.3 KONSEP LIMIT

- Misalkan y = f(x) suatu fungsi, a dan L bilangan riil sedemikian hingga:

- Bila x dekat a tetapi tidak sama dg a ($x \neq a$), f(x) dekat ke L
- Bila x mendekati a tetapi $x \neq a$, maka f(x) mendekati L
- Misalkan f(x) dapat kita buat sedekat mungkin ke L dengan membuat x cukup dekat a tetapi tdk sama dengan a

❖ Maka dapat dikatakan bhw limit f(x) bila x mendekati a adalah L,

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

6.4 SIFAT – SIFAT LIMIT

❖ $\lim_{x \to a} c = c$

❖ $\lim_{x \to a} x^n = a^n$

❖ $\lim_{x \to a} c\, f(x) = c \lim_{x \to a} f(x)$

❖ $\lim_{x \to a} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \to a} f(x) \pm \lim_{x \to a} g(x)$

❖ $\lim_{x \to a} (f(x) \times g(x)) = \lim_{x \to a} f(x) \times \lim_{x \to a} g(x)$

❖ $\lim_{x \to a} f(x)/g(x) = (\lim_{x \to a} f(x))/(\lim_{x \to a} g(x))$

❖ $\lim_{x \to a} f(x)^n = (\lim_{x \to a} f(x))^n$

❖ $\lim_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to a} f(x)}$

6.5 Contoh – Contoh Soal Limit

1. $\lim\limits_{x \to 2} (3x + 2) = 3 \lim x + \lim 2 = 3.2 + 2 = 8$

2. $\lim\limits_{x \to 1} (2x^2 - 3x + 5) = 2 - 3 + 5 = 4$

3. $\lim\limits_{x \to -1} (x^2 - 1) = 0$

4. $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x + 3}{x - 3} = \dfrac{1}{-5} = -\dfrac{1}{5}$

5. $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{x^2 + 6x + 9}{x^2 - 9} = \lim\limits_{x \to -3} \dfrac{(x + 3)^2}{(x+3)(x-3)} = \lim\limits_{x \to -3} \dfrac{(x + 3)}{(x - 3)} = 0$

6. $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 + 6x + 9}{x^2 - 9} = + \sim$, tak ada limit

7. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3 - 8}{x^2 - 4} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{(x-2)(x^2+2x+4)}{(x - 2)(x + 2)} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 +2x+4}{x + 2} = 3$

8. $\lim\limits_{x \to \sim} \dfrac{2x + 4}{4x - 5} = \lim\limits_{x \to \sim} \dfrac{2 + 4/x}{4 - 5/x} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$

9. $\lim\limits_{x \to \sim} \dfrac{3x^2 + 2x + 1}{2x^2 - 3x} = \lim\limits_{x \to \sim} \dfrac{3 + 2/x + 1/x^2}{2 - 3/x} = \dfrac{3}{2}$

10. $\lim\limits_{x \to \sim} \dfrac{x - 1}{x^2 + 4x - 3} = \lim\limits_{x \to \sim} \dfrac{1/x - 1/x^2}{1 - 4/x - 3/x^2} = \dfrac{0}{1} = 0$

11. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1 - x^2}{2- x^2 + 3} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(1 - x^2)(2 + \sqrt{x^2 + 3})}{(2 - \sqrt{x^2 + 3})(2 + \sqrt{x^2 + 3})}$

$= \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(1 - x^2)(2 + \sqrt{x^2 + 3})}{1 - x^2} = \lim\limits_{x \to 1} (2 + \sqrt{x^2 + 3}) = 4$

12 $\lim\limits_{x \to \sim} \dfrac{4x^2}{x^2 + 2} = \lim\limits_{x \to \sim} \dfrac{4}{1/x + 2/x^3} = \sim$, tak ada limit

13. $\lim\limits_{x \to \sim} \dfrac{3^x - 3^{-x}}{3^x + 3^{-x}} = \lim\limits_{x \to \sim} \dfrac{1 - 3^{-2x}}{1 + 3^{-2x}} = 1$

14. $\lim\limits_{x \to -\sim} \dfrac{3^x - 3^{-x}}{3^x + 3^{-x}} = \lim\limits_{x \to -\sim} \dfrac{3^{2x} - 1}{3^{2x} + 1} = \dfrac{-1}{1} = -1$

15. $\lim\limits_{x \to -\sim} \dfrac{x^2 + 6x + 9}{x^2 - 9} = \sim$, tak ada limit

16. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x - 1}{x^2 - 1} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x - 1}{(x - 1)(x + 1)} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1}{x + 1} = \dfrac{1}{2}$

BAB 7 TURUNAN

Turunan merupakan pengembangan dari materi limit sehingga menjadisalah satu dasar dalam analisis penguasaan terhadap berbagai konsep analisismatematik dan fisika sehingga prinsip turunan fungsi dapat membantu dalammemecahkan suatu permasalahan dalam kehidupan sehari-hari.

Suatu fungsi dapatdianalisis berdasarkan ide naik atau turun, keoptimalan, dan titik beloknya dengan menggunakan konsep turunan. Pada bagian berikut, kita akan mencobamengamati berbagai permasalahan nyata untuk mempelajari beberapa kasus dancontoh untuk menemukan konsep turunan. Dalam kehidupan sehari-hari, kita sering menjumpai laju perubahan. Laju perubahan erat kaitannya dengan kecepatan.

Turunan adalah salah satu cabang ilmu matematika yang digunakan untuk menyatakan hubungan kompleks antara satu variabel tak bebas dengan satu atau beberapa variabel bebas lainnya. Konsep turunan sebagai bagian utama darikalkulus dipikirkan pada saat yang bersamaan oleh Newton dan Leibniz sebagai suatu alat untuk menyelesaikan berbagai masalah dalam geometri dan mekanik.

PEMBAHASAN MATERI

Turunan merupakan salah satu dasar atau fondasi dalam analisis sehingga penguasaan terhadap berbagai konsep dan prinsip turunan fungsi dapat membantu dalam memecahkan suatu permasalahan dalam kehidupan sehari-hari. Suatu fungsi dapat dianalisis berdasarkan ide naik atau turun, keoptimalan, dan titik beloknya dengan menggunakan konsep turunan. Pada bagian berikut, kita akan mencoba mengamati berbagai permasalahan nyata dan mempelajari beberapa kasusdan contoh untuk menemukan konsep turunan.

Turunan juga merupakan salah satu cabang ilmu matematika yang digunakan untuk menyatakan hubungan kompleks antara satu variabel tak bebas dengan satu atau beberapa variabel bebas lainnya. Konsep turunan sebagai bagian utama dari kalkulus dipikirkan pada saat yang bersamaan oleh Newton dan Leibniz dari tahun 1665 sampai dengan tahun 1675 sebagai suatu alat untuk menyelesaikan berbagai masalah dalam geometri dan mekanika. Sir Isaac Newton (1642 - 1727), ahli matematika dan fisika bangsa Inggris dan Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 - 1716), ahli matematika bangsa Jerman dikenal sebagai ilmuwan yang menemukan kembali kalkulus. Kalkulus memberikan bantuan tak ternilai pada perkembangan beberapa cabang ilmu pengetahuan lain.

Dengan mempelajari mengenai konsep turunan fungsi dalam pemecahan masalah. Dengan mempelajarinya dapat menggunakan konsep dan aturan turunan fungsi untuk menghitung dan menentukan karakteristik turunan fungsi, merancang model matematika dari masalah yang berkaitan dengan ekstrim fungsi, sekaligus menyelesaikan dan memberikan penafsirannya.

Pada bab ini akan dibahas beberapa materi yaitu tentang pengertian turunan, sifat dan aturan – aturan untuk menentukan turunan terrmasuk juga penggunaan aturan rantai dalam menyelesaikan masalah turunan.

TUJUAN INSTRUKSIONAL KHUSUS

Setelah selesai mempelajari bab ini,

1. Mahasiswa diharapkan mampu Menjelaskan pengertian turunan fungsi
2. Mengetahui sifat dan aturan turunan dalam perhitungan turunan fungsi
3. Mengetahui turunan untuk menentukan karakteristik suatu fungsi dan memecahkan masalah
4. Merancang model matematika dari masalah yang berkaitan dengan ekstrim fungsi

7.1 PENDAHULUAN

Limit suatu fungsi merupakan salah satu konsep mendasar dalam kalkulus dan analisis, tentang kelakuan suatu fungsi mendekati titik masukan tertentu. Suatu fungsi memetakan keluaran *f(x)* untuk setiap masukan *x*.

Fungsi tersebut memiliki limit *L* pada titik masukan *h* bila *f(x)* "dekat" pada L ketika *x* dekat pada *h*. Dengan kata lain, *f(x)* menjadi semakin dekat kepada *L* ketika *x* juga mendekat menuju h. Lebih jauh lagi, bila *f* diterapkan pada tiap masukan yang *cukup* dekat pada *h*, hasilnya adalah keluaran yang (secara sembarang) dekat dengan *L*. Bila masukan yang *dekat* pada *h* ternyata dipetakan pada keluaran yang sangat berbeda, fungsi *f* dikatakan tidak memiliki limit.

Konsep limit digunakan dalam berbagai macam bidang dalam kehidupan sehari-hari. Sebagai contoh, produksi maksimum dari mesin suatu pabrik, dapat dikatakan merupakan **limit untuk pencapain hasil**. Pada prakteknya, pencapaian tersebut tidak tepat, tapi **mendekati sedekat dekatnya**.

7.2 PENGERTIAN TURUNAN

Turunan fungsi ƒ adalah fungsi lain ƒ' (dibaca f aksen) yang nilainya pada sembarang bilangan c adalah

$f'(c) = \lim \underline{f(c+h) - f(c)}$, asalkan limit ini ada

$h \to 0$

Dikatakan ƒ terdiferensial (terturunkan) di c. Pencarian turunan disebut pendiferensialan. Bagian kalkulus yang berhubungan dengan turunan disebut kalkulus diferensial.

Contoh. 1

Andaikan $f(x) = 13x - 6$, carilah $f'(4)$

Penyelesaian

$$f'(4) = \lim_{h\to 0} \frac{f(4+h) - f(4)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{[13(4+h) - 6] - [13(4) - 6]}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{13h}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} 13$$

$$= 13$$

Contoh 2

Jika $f(x) = \frac{1}{}$, Carilah $f'(x)$

Penyelesaian

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{x - (x + h)}{(x + h)\,x} \cdot \frac{1}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-h}{(x + h)\,x} \; \frac{1}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} , \frac{-1}{(x + h)x} , = \frac{-1}{x^2}$$

7.3 ATURAN UNTUK MENCARI TURUNAN

1. Aturan Fungsi Konstanta

$f(x) = k$maka $f'(x) = 0$ atau $D(k) = 0$

Bukti: $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{k - k}{h}$$

$$= 0$$

2. Aturan Fungsi Identitas

$f(x) = x$ maka $f'(x) = 1$ atau $D(x) = 1$

Bukti: $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{x + h - x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h}{h} = 1$$

3. Aturan Pangkat

$f(x) = x^n$ maka $f'(x) = n\,x^{n-1}$ atau $D(x^n) = n\,x^{n-1}$

Bukti:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{x^n + n\,x^{n-1}h + n(n-1)/2\ x^{n-2}h^2 + .. + n\,x\,h^{n-1} + h^n\,x^n}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h\{n\,x^{n-1} + n(n-1)/2.\ x^{n-2}h + . .. + n\,x\,h^{n-2} + h^{n-1}]}{h}$$

$$= n\,x^{n-1}$$

Contohnya

- $D(x^3) = 3x^2$
- $D(x^9) = 9x^8$
- $D(x^{100}) = 100x^{99}$
- $D(3x^5 + 3x^2) = 15x^4 + 6x$
- $D\left(\frac{2x^3}{2} - 10x\right) = 3x^2 - 10$
- $D\left(\frac{3x^2}{x^3} + 3\right) = -3x^{-2}$

4. Aturan Kelipatan Konstanta

Jika k suatu konstanta dan f suatu fungsi maka
$(k f)'(x) = k. f'(x)$ Atau $D[k. f(x)] = k. D f(x)$

Bukti : Andaikan $F(x) = k. f(x)$ maka

$$F'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{k. f(x+h) - k. f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} k. \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= k. \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{} = k. f'(x)$$

5. Aturan Jumlah

Jika f dan g adalah fungsi-fungsi yg terdiferensial
Maka $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$ atau

$$D[f(x) + g(x)] = D f(x) + D g(x)$$

Bukti : Andaikan $F(x) = \underline{f(x)}$ Maka .g(x)

$$F'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{[f(x+h) + g(x+h) - [f(x) + g(x)]}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \left[\frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right]$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

$$= f'(x) + g'(x)$$

6. Aturan Selisih

Jika ƒ dan g fungsi2 yang terdiferensialkan maka

$(ƒ - g)'(x) \quad = ƒ'(x) - g'(x)$

Atau $D [ƒ(x) - g(x)] = D ƒ(x) - D g(x)$

Contoh :

a. $D [5x^7 + 7x - 6] = 35 x^6 + 7$

b. $D [4x^6 - 3x^5 - 10x^2 + 5x + 16]$

$= 24x^5 - 15x^4 - 20x + 5$

7. Aturan Hasil Kali

Jika ƒ dan g fungsi yang terdiferensialkan maka

$(ƒ_0\ g)'(x) = ƒ'(x) . g(x) + ƒ(x) . g'(x)$, atau

$D [ƒ(x).g(x)] = D ƒ(x).g(x) + ƒ(x).D g(x)$

Contoh:

Carilah turunan dari $f(x) = (3x^3 - 5)(2x^4 - x)$

Penyelesaian

$F'(x) = D(3x^3 - 5).(2x^4 - x) + (3x^3 - 5). D(2x^4 - x)$

$= 9x^2 (2x^4 - x) + (3x^3 - 5). (8x^3 - 1)$

$= \; 18x^6 - 9x^3 + 24x^6 - 43x^3 + 5$

$= \; 42x^6 - 52x^3 + 5$

8. Aturan Hasil Bagi

Andaikan ƒ dan g fungsi2 yang terdiferensial dengan $g(x) \neq 0$ Maka

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x).\,g(x) - f(x).\,g'(x)}{g^2(x)}$$

Atau $$D\,\frac{f(x)}{.g(x)} = \frac{D\,f(x).\,g(x) - f(x).\,D\,g(x)}{g^2(x)}$$

Contoh:

Carilah turunan dari $f(x) = \dfrac{(3x - 5)}{(x^2 + 7)}$

Penyelesaiannya

$$F'(x) = \frac{D(3x-5).\,(x^2+7) - (3x-5).\,D(x^2+7)}{(x^2+7)^2}$$

$$\frac{3(x^2+7) - 2x(3x-5)`}{(x^2+7)^2}$$

$$\frac{3x^2 + 21 - 6x^2 + 10x}{(x^2+7)^2} = \frac{-3x^2 + 10x + 21}{(x^2+7)^2}$$

Contoh.

Carilah Dy jika $y = \dfrac{2}{x^4 + 1} + \dfrac{3}{x}$

Penyelesaian

$$Dy = D\left[\frac{2}{x^4+1}\right] + D\left[\frac{3}{x}\right]$$

$$= \frac{0.(x^4+1) - 2.(4x^3)}{(x^4+1)^2} + \frac{0.x - 3.1}{x^2}$$

$$= \frac{-8x^3}{(x^4+1)^2} - \frac{3}{x^2}$$

9. Aturan Rantai

Bila z = f (x , y), sedangkan x = x (t) dan y = y (t)

maka z = f [x (t) , y (t)] yang artinya z fungsi dari t

Maka Turunan z terhadap t adalah

$$\frac{dz}{dt} = \frac{dz}{dt}\,\frac{dx}{} + \frac{dz}{dy}\,\frac{dy}{dt}$$

Contoh

Hitunglah $\frac{dz}{dt}$ *jika* $z = x^3 y$ *dengan* $x = 2t$ *dan* $y = t^2$

Penyelesaian :

$$\frac{dz}{dt} = \frac{dz}{dx}\,\frac{dx}{dt} + \frac{dz}{dy}\,\frac{dy}{dt}$$

$$= (3x^2 y)(2) + (x^3)(2t)$$

$$= 6x^2 y + 2x^3 t$$

$$= 6(2t)^2 t^2 + 2(2t)^3 t$$

$$= 24t^4 + 16t^4$$

$$= 40t^4$$

7.4 TURUNAN TRIGONOMETRI

Jika Y suatu fungsi Trigonometri maka rumus-rumus turunannya

1. $y = \text{Sin } x$ maka $y' = \text{Cos } x$
2. $y = \text{Cos } x$ maka $y' = -\text{Sin } x$
3. $y = \text{Tg } x$ Maka $y' = \text{Sec}^2 x$
4. $y = \text{Ctg } x$ Maka $y' = -\text{Cosec}^2 x$
5. $y = \text{Sec } x$ Maka $y' = \text{Sec } x \text{ Tg } x$
6. $y = \text{Cosec } x$ Maka $y' = -\text{Cosec } x \text{ Tg } x$

Contoh

1. Buktikan turunan f x) = Sin x adalah $f'(x) = \text{Cos } x$

Penyelesaianya

$$f(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\text{Sin }(x+h) - \text{Sin } x}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\text{Sin x Cox h} + \text{Cos x Sin h} - \text{Sin x}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\text{Sin x (cos h - 1)} + \text{Cos x Sin h}}{h}$$

$$= \text{Sin x} \lim_{h \to 0} \frac{\text{(Cox h - 1)}}{h} + \text{Cos x} \lim_{h \to 0} \frac{\text{Sin h}}{h}$$

$$= \text{Sin x} \;.\; 0 + \text{Cos x} \;.\; 1$$

$$= \text{Cos x}$$

2. Buktikan turunan f (x) = Cos x adalah - Sin x

Penyelesaianya

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\text{Cos (x + h)} - \text{Cos x}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\text{Cos x Cos h} - \text{Sin x Sin h} - \text{Cos x}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\text{Cos x (Cos h - 1)} - \text{Sin x Sin h}}{h}$$

$$= \text{Cos x} \lim_{H \to 0} \frac{\text{(Cos h} - 1)}{h} - \text{Sin x} \lim_{h \to 0} \frac{\text{Sin h}}{h}$$

$$= \text{Cos x} \;.\; 0 - \text{Sin x} \;.\; 1$$

$$= -\text{Sin x}$$

7.5 SOAL-SOAL LATIHAN

1. Diketahui $f(x) = 2x^5 - 5x^2 + 14$ .Tentukan turunannya

2. Diketahui $f'(x)$ adalah turunan dari $f(x) = 3x^3 - 3x^2 + 9x + 6$, tentukan nilai $f'(3)$

3. Diketahui fungsi $f(x) = 5x^4 + 3x^3 - 2x + 9$ dan $f'(x)$ adalah turunan pertama dari f(x). Nilai dari $f'(1)$ adalah

4. Tentukanlah turunan pertama fungsi $f(x) = (2x^2 + 7)^4$

5. Diketahui $y = 4x^3 - \frac{2}{5}x^5 - \frac{1}{3}x^6 - 5x$. Tentukan turunannya

6. Diketahui $f(x) = (2x + 2)^2$ .Tentukan turunanya

7. Jika $f(x) = \sin^2(2x + \pi/3)$,maka tentukanlah nilai $f'(0)$

8. Tentukanlah turunan pertama dari $f(x) = \sin^3(3x^2 - 2)$

9. Turunan pertama $f(x) = 2\cos^3 x$ adalah ...

10. Hitunglah turunan pertama dari fungsi berikut

a. $f(x) = 6\sqrt{x^3}$

b. $F(x) = 16\sqrt{x^4}$

DAFTAR PUSTAKA

- Alpa C. Chiang, dan Kevin Wainwright, Dasar – dasar Matematika .jilid 1 . Erlangga. 2006
- Alpa c. Chiang dan Kevin Wainwright , Dasar-dasar Matematika , Jilid 2, Erlangga , 2006
- ST. Negoro dan B. Harahap. Ensiklopedia Matematika. Edisi ke 2. Ghalia Indonesia, Jakarta, 2003
- Nata wirawan. Matematika Ekonomi Edisi ke 3. Keraras emas Denpasar Bali, 2001
- Purcell, Edwin j . dan Varberg. Kalkulus Jilid 1. Alih bahasa Drs. I NyomanSusila, M.Sc. Binapura Aksara .Jakarta 2010

Profil Singkat Penulis

Maizar, S.Pd., M.Si lahir di Dumai tanggal 02 Mei 1969. Beliau menempuh pendidikan Sarjana (S1) di Universitas Bung Hatta (UBH) Padang. Meraih gelar Magister (S2) di Universitas Hasanuddin (UNHAS) Makassar dan saat ini sedang menemupuh pendidikan Doktor (S3) di Universitas Persada Indonesia YAI (UPI-YAI). Penulis saat ini tercatat sebagai dosen tetap program studi Manajemen di Universitas Ibnu Sina.

Ita Mustika, S.E., M.Ak, CTT lahir tanggal 08 Juni 1990 di Desa Sipare-pare hiilir, Labuhan Batu Utara, Sumatera Utara. Beliau merupakan anak pertama dari pasangan Bapak Haidir Hasibuan dan Ibu Siti Aisyah Nasution. Beliau mengabdi sebagai dosen program studi Akuntansi di Uversitas Ibnu Sina. Penulis menempuh pendidikan Sarjana (S1) Akuntansi di Universitas Bung Hatta (UBH) Padang. Meraih gelar Magister (S2) Akuntansi di Universitas Batam (UNIBA) Batam. Saat ini sedang menempuh pendidikan Doktor (S3) Ilmu Akuntansi di Universitas Sumatera Utara (USU).

IKAPI
IKATAN PENERBIT INDONESIA

ISBN 978-623-5645-08-7
9 786235 645087